Cognome: .... **Nome:** ....

GEOMETRIA I (Canale I-Z, Prof. P. Piccinni) - Prova scritta del 3.7.2015

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome, nome su questo foglio. Scrivere anche se, in caso positivo di esonero, si preferisce sostenere la prova orale nel primo o nel secondo appello.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove non si possono consultare testi e appunti, né utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **2 ore e 15 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	8	
3	8	
4	7	
Totale	30	

DARE INDICAZIONE DEL PROCEDIMENTO E CALCOLI ANCHE UTILIZZANDO IL RETRO DI OGNI SINGOLO FOGLIO

Esercizio 1. Si considerino le seguenti matrici in $M_4(\mathbb{C})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Stabilire se A_1 e/o A_2 sono matrici unitarie ($A\bar{A}^t = I$), hermitiane ($A = \bar{A}^t$), antihermitiane ($A = -\bar{A}^t$).

ii) Stabilire se qualcuna (o tutte) le matrici A_1, A_2, $B_1 = A_1A_2$, $B_2 = A_2A_1$ sono diagonalizzabili.

iii) Stabilire se tra A_1, A_2, B_1, B_2 vi sia qualche coppia di matrici simili.

Esercizio 2. Si considerino nello spazio proiettivo $\mathbb{R}P^3$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, le rette

$$r_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_0 & = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_0 & = 0 \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} x_1 + x_3 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_0 & = 0 \end{cases}, \quad r_3 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_0 & = 0 \\ x_2 - x_3 - 6x_0 & = 0 \end{cases}.$$

i) Verificare che r_1, r_2, r_3 passano per uno stesso punto P_0 e determinare le coordinate proiettive omogenee di P_0.

ii) Determinare l' equazione del piano α contenente le rette r_1 e r_2.

iii) Siano β, γ i piani rispettivamente per r_1 e r_3, e per r_2 e r_3 (non si chiede di scrivere la loro equazione). Siano A, B, C i punti che hanno per coordinate omogenee i coefficienti delle equazioni rispettivamente di α, β, γ, e sia π_0 il piano che ha le coordinate omogenee di P_0 come coefficienti della sua equazione. Che relazione implica la dualità proiettiva tra i tre punti A, B, C e il piano π_0? (Motivare la risposta)

Esercizio 3. Si considerino nel piano proiettivo complesso $\mathbb{C}P^2$ le coniche

$$\mathcal{C}_1 : x_0^2 + 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_0x_1 + 2x_0x_2 - 4x_1x_2 = 0,$$

$$\mathcal{C}_2 : x_0^2 + x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_0x_1 + 4x_0x_2 + 4x_1x_2 = 0.$$

essendo $[x_0, x_1, x_2]$ coordinate omogenee.

i) Stabilire se $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sono generali, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri.

ii) Sia $\mathcal{C} = \lambda_1\mathcal{C}_1 + \lambda_2\mathcal{C}_2$. Determinare tra tali $\mathcal{C}$ (fascio di coniche generato da $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$) le eventuali coniche generali.

iii) Determinare i punti di intersezione tra $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$. Tutte le coniche $\mathcal{C}$ del fascio passano per tali punti di intersezione?

Esercizio 4. Si consideri nel piano affine complesso la curva algebrica

$$\mathcal{C} : x^4 + 4x^2y^2 - 4y^2 = 0,$$

essendo (x, y) coordinate affini.

i) Stabilire se $O = (0, 0)$ è un punto semplice o singolare per $\mathcal{C}$, determinando nelle due eventualità l'equazione della retta tangente o le equazioni delle tangenti principali.

ii) Determinare i punti impropri (reali e complessi) di $\mathcal{C}$, precisando se essi sono semplici o singolari.

iii) Stabilire se $\mathcal{C}$ contiene punti reali $P_0 = (x_0, y_0)$ con $|x_0| > 1$ e se ne contiene con $|y_0| > 1$ (in entrambi i casi motivare la risposta).