Nome e Cognome: ....

Numero di matricola: ....

Geometria I (Canale M-Z, Prof. P. Piccinni) - Prova scritta del 3.7.2017

Norme per le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito nome, cognome, e numero di matricola su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove non si possono consultare testi e appunti, né utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **2 ore e 30 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	10	
2	10	
3	10	
Totale	30	

DARE INDICAZIONE DEL PROCEDIMENTO E CALCOLI ANCHE UTILIZZANDO IL RETRO DI OGNI SINGOLO FOGLIO

Esercizio 1. Siano $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$. Si consideri la forma bilineare simmetrica

$$b : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}, \qquad b(Z, W) = z_1 w_1 + z_2 w_3 + z_3 w_2.$$

i) Scrivere la matrice associata a b nella base canonica di $\mathbb{C}^3$ e precisare il rango di b.

ii) Stabilire se esiste una matrice $C \in GL(3, \mathbb{C})$ (dunque C invertibile) tale che le sostituzioni $Z = CZ', W = CW'$ consentono di scrivere b in forma canonica:

$$b(Z', W') = z_1' w_1' + z_2' w_2' + z_3' w_3'.$$

iii) Indicare esplicitamente la matrice C di cui al punto ii) e indicare esplicitamente una base di $\mathbb{C}^3$ rispetto a cui b si scrive in forma canonica.

iv) Stabilire se l'applicazione

$$h : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}, \qquad h(Z, W) = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_3 + z_3 \bar{w}_2,$$

essendo $\bar{z}, \bar{w}$ i complessi coniugati di z, w, è una forma hermitiana (ovvero $h(Z, W) = \overline{h(W, Z)}$) e se è defiinita positiva (ovvero $h(Z, Z) \in \mathbb{R}$ e ≥ 0 nonché $h(Z, Z) = 0 \Rightarrow (z_1, z_2, z_3) = (0, 0, 0)$).

Esercizio 2. Si consideri nello spazio proiettivo $\mathbb{R}P^3$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, i punti

$$P_1 = [1, 0, 1, 1], \quad P_2 = [1, 3, 2, 1], \quad P_3 = [0, 1, 1, 2], \quad P_4 = [0, 6, 2, 0].$$

i) Verificare che tre dei punti P_1, P_2, P_3, P_4, sono allineati e scrivere le equazioni cartesiane della retta che li contiene.

ii) Scrivere l'equazione cartesiana del piano $\pi \subset \mathbb{R}P^3$ individuato dai punti P_1, P_2, P_3, P_4.

iii) Stabilire se i cinque punti $P_1, P_2, P_3, P_4, U = [1, 1, 1, 1]$ costituiscono in $\mathbb{R}P^3$ un riferimento proiettivo.

Esercizio 3. Si consideri nel piano affine reale $A^2_{\mathbb{R}}$ la conica $\mathcal{C}$:

$$f(x,y) = 2x^2 + 7xy - 4y^2 - x + 14y - 6 = 0,$$

essendo (x,y) coordinate affini.

i) Stabilire il tipo proiettivo di $\mathcal{C}$, ovvero se $\mathcal{C}$ è generale, semplicemente degenere o doppiamente degenere, e nel secondo o terzo caso scrivere le equazioni cartesiane delle rette componenti.

ii) Determinare il tipo affine reale di $\mathcal{C}$, e scrivere la sua equazione canonica affine reale.

iii) Determinare per la conica $\mathcal{C}$ i coefficienti $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, b_1, b_2$ nelle equazioni

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + b_1 \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + b_2 \end{cases}$$

di un' affinità che porta l'equazione cartesiana $f(x,y) = 0$ di $\mathcal{C}$ nella sua equazione canonica affine reale [Suggerimento: si utilizzino le risposte date ai punti i) e ii)].