Geometria I (Canale M-Z, Prof. P. Piccinni) - Prova scritta del 3.7.2017

Esercizio 1. Siano $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$. Si consideri la forma bilineare simmetrica

$$b : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}, \qquad b(Z, W) = z_1 w_1 + z_2 w_3 + z_3 w_2.$$

i) Scrivere la matrice associata a b nella base canonica di $\mathbb{C}^3$ e precisare il rango di b.

ii) Stabilire se esiste una matrice $C \in GL(3, \mathbb{C})$ (dunque C invertibile) tale che le sostituzioni $Z = CZ', W = CW'$ consentono di scrivere b in forma canonica:

$$b(Z', W') = z'_1 w'_1 + z'_2 w'_2 + z'_3 w'_3.$$

iii) Indicare esplicitamente la matrice C di cui al punto ii) e indicare esplicitamente una base di $\mathbb{C}^3$ rispetto a cui b si scrive in forma canonica.

iv) Stabilire se l'applicazione

$$h : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}, \qquad h(Z, W) = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_3 + z_3 \bar{w}_2,$$

essendo $\bar{z}, \bar{w}$ i complessi coniugati di z, w, è una forma hermitiana (ovvero $h(Z, W) = \overline{h(W, Z)}$) e se è defiinita positiva (ovvero $h(Z, Z) \in \mathbb{R}$ e ≥ 0 nonché $h(Z, Z) = 0 \Rightarrow (z_1, z_2, z_3) = (0, 0, 0)$).

Soluzione. i) Risulta $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, di rango 3. Dunque il rango di b è 3.

ii) Si, perché b è simmetrica, e dunque diagonalizzabile per congruenza.

iii) Per individuare una tale matrice C si può partire dal vettore non isotropo $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, con complemento ortogonale rispetto a b il piano $\vec{e}_1^{\perp} : z_1 = 0$. In $\vec{e}_1^{\perp}$ un vettore non isotropo è $\vec{v}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (0, 1, 1)$, il cui complemento ortogonale è il piano $z_2 + z_3 = 0$. Ne segue che $v_3 = (0, 1, -1)$ completa una base diagonalizzante. Si noti che $b(\vec{v}_1, \vec{v}_1) = 1, b(\vec{v}_2, \vec{v}_2) = 2, b(\vec{v}_3, \vec{v}_3) = -2$. Ne segue che per avere la forma canonica $b(Z', W') = z'_1 w'_1 + z'_2 w'_2 + z'_3 w'_3$ la base da usare è $\vec{w}_1 = (1, 0, 0), \vec{w}_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \vec{w}_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}} i, -\frac{1}{\sqrt{2}} i)$. Dunque

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} i \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} i \end{pmatrix}.$$

iv) h è hermitiana, poiché $z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_3 + z_3 \bar{w}_2 = \overline{w_1 \bar{z}_1 + w_2 \bar{z}_3 + w_3 \bar{z}_2}$, ma non è definita positiva: p. es. se $\vec{v} = (0, 1, i)$, allora $b(\vec{v}, \vec{v}) = 0$.

Esercizio 2. Si consideri nello spazio proiettivo $\mathbb{R}P^3$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, i punti

$$P_1 = [1, 0, 1, 1], \quad P_2 = [1, 3, 2, 1], \quad P_3 = [0, 1, 1, 2], \quad P_4 = [0, 6, 2, 0].$$

i) Verificare che tre dei punti P_1, P_2, P_3, P_4, sono allineati e scrivere le equazioni cartesiane della retta che li contiene.

ii) Scrivere l'equazione cartesiana del piano $\pi \subset \mathbb{R}P^3$ individuato dai punti P_1, P_2, P_3, P_4.

iii) Stabilire se i cinque punti $P_1, P_2, P_3, P_4, U = [1, 1, 1, 1]$ costituiscono in $\mathbb{R}P^3$ un riferimento proiettivo.

Soluzione i) Risulta $P_4 = 2(P_2 - P_1)$, e dunque P_1, P_2, P_4 sono allineati. La retta r che li contiene ha equazioni parametriche $x_0 = \lambda + \mu, x_1 = 3\mu, x_2 = \lambda + 2\mu, x_3 = \lambda + \mu$, e dunque equazioni cartesiane per esempio $x_0 - x_3 = 0, x_0 + \frac{1}{3}x_1 - x_2 = 0$.

ii) Essendo P_1, P_2, P_4 allineati, il piano π è individuato da P_1, P_2, P_3. Dunque

$$\pi : \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0,$$

ovvero $\pi : \ 2x_0 + x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$.

iii) No, poiché i primi quattro punti, essendo complanari sul piano π, non sono linearmente indipendenti.

Esercizio 3. Si consideri nel piano affine reale $A^2_{\mathbb{R}}$ la conica $\mathcal{C}$:

$$f(x, y) = 2x^2 + 7xy - 4y^2 - x + 14y - 6 = 0,$$

essendo (x, y) coordinate affini.

i) Stabilire il tipo proiettivo di $\mathcal{C}$, ovvero se $\mathcal{C}$ è generale, semplicemente degenere o doppiamente degenere, e nel secondo o terzo caso scrivere le equazioni cartesiane delle rette componenti.

ii) Determinare il tipo affine reale di $\mathcal{C}$, e scrivere la sua equazione canonica affine reale.

iii) Determinare per la conica $\mathcal{C}$ i coefficienti $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, b_1, b_2$ nelle equazioni

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + b_1 \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + b_2 \end{cases}$$

di un' affinità che porta l'equazione cartesiana $f(x, y) = 0$ di $\mathcal{C}$ nella sua equazione canonica affine reale [Suggerimento: si utilizzino le risposte date ai punti i) e ii)].

Soluzione i) + ii) La matrice di $\mathcal{C}$ è $A = \begin{pmatrix} -6 & \frac{1}{2} & 7 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{7}{2} \\ 7 & \frac{7}{2} & -4 \end{pmatrix}$, di rango 2. Dunque $\mathcal{C}$ è semplicemente degenere e, essendo $\det \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & -4 \end{pmatrix} < 0$, è un'iperbole semplicemente degenere, ovvero una coppia di rette reali e distinte. L'equazione canonica affine reale di $\mathcal{C}$ è dunque

$$x'^2 - y'^2 = (x' + y')(x' - y') = 0.$$

Per scrivere le equazioni delle due rette componenti, si può p. es. determinare prima il loro punto di intersezione A, come unico punto doppio della conica. Infatti il sistema $f = 0; f_x = 4x + 7y - 1 = 0, f_y = 7x - 8y + 14 = 0$ ha come unica soluzione $A = (-\frac{10}{9}, \frac{7}{9})$, e studiando l'intersezione del fascio di rette di centro A: $x = \frac{10}{9} + lt, y = -\frac{7}{9} + mt$, si determinano subito le due rette componenti:

$$r_1 : x + 4y - 2 = 0, \qquad r_2 : 2x - y + 3 = 0.$$

iii) L'affinità richiesta deve dunque mandare le rette $r_1 : x + 4y - 2 = 0,\ r_2 : 2x - y + 3 = 0$ rispettivamente nelle "bisettrici" $x' + y' = 0$, e $x' - y' = 0$ (o viceversa). Dal sistema

$$\begin{cases} x + 4y - 2 = x' + y' \\ 2x - y + 3 = x' - y' \end{cases}$$

si ottiene, risolvendo rispetto a (x, y):

$$\begin{cases} x = \frac{5}{9}x' - \frac{1}{3}y' - \frac{10}{9} \\ y = \frac{1}{9}x' + \frac{1}{3}y' + \frac{7}{9}. \end{cases}$$