

Geometria I - Canale M-Z - Prof. P. Piccinni

Prima prova in itinere - 10 aprile 2017

Compito A

Nome e Cognome: _____

Numero di Matricola: _____

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	10	
2	10	
3	10	
Totale	30	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 punti.

Verrà corretto solo quello che sarà scritto su queste pagine.

Voto/30:

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale $V_{\mathbf{R}}^4 = M_2(\mathbf{R})$ delle matrici 2×2 ad elementi in \mathbf{R} e su esso l'operatore lineare $T : V_{\mathbf{R}}^4 \rightarrow V_{\mathbf{R}}^4$ definito da

$$T(A) = A + \text{tr}(A)I,$$

essendo $\text{tr}(A)$ la traccia di $A \in M_2(\mathbf{R})$ e I la matrice identica.

- i) Determinare $\ker T$ e $\text{im} T$ (giustificando, qui e in tutto il compito, nello Svolgimento la risposta data).
- ii) Scrivere la matrice $B \in M_4(\mathbf{R})$ associata a T nella base canonica di $M_2(\mathbf{R})$.
- iii) Determinare autovalori e autospazi di T .
- iv) Stabilire se T è diagonalizzabile.

v) B è simmetrica? Ha senso considerare B come matrice di una forma bilineare $b : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$? Tale b è un prodotto scalare definito positivo?

-o-

Svolgimento (anche sul retro!):

-o-

Risposte: $\ker T =$ $\text{im} T =$ Matrice $B:$

Autovalori: Autospazi: T diagonalizzabile?

B simmetrica? B di una forma bilineare $b?$ b def. positiva?

Esercizio 2. Sia $V_{\mathbf{R}}^3 = \mathbf{R}_{\leq 2}[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2; a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti in \mathbf{R} .

Si consideri l'applicazione:

$$b : \mathbf{R}_{\leq 2}[x] \times \mathbf{R}_{\leq 2}[x] \rightarrow \mathbf{R},$$

evidentemente una forma bilineare simmetrica, definita dalla formula

$$b(p(x), q(x)) = p(1)q(1) + p(-1)q(-1) + 2p(0)q(0),$$

dove $p(1), q(1), p(-1), q(-1), p(0), q(0)$ denota il valore del poilmomio per i valori indicati di x .

- i) Verificare che b è definita positiva, dunque un prodotto scalare in $\mathbf{R}_{\leq 2}[x]$.
- ii) Scrivere la matrice A di b rispetto alla base standard $\mathbb{E} = (1, x, x^2)$ di $\mathbf{R}_{\leq 2}[x]$, e determinare gli autovalori di A .
- iii) A è diagonalizzabile per similitudine? E per congruenza? Esiste una matrice C ortogonale tale che $C^t AC$ sia diagonale? Esiste una matrice ortogonale G tale che $G^t AG$ sia la matrice identica?

Svolgimento (anche sul retro!):

Risposte: N.B. La verifica che b è definita positiva deve essere fatta nello Svolgimento!

$A =$ Autovalori di A :

A diag. per similitudine? A diag. per congruenza?

Esiste C ? Esiste G ?

Esercizio 3. Si considerino in \mathbf{C}^4 i quattro vettori

$$\vec{p}_1 = (0, i, 0, i), \vec{p}_2 = (1, 1, 0, 0), \vec{q}_1 = (0, 0, 1, 0), \vec{q}_2(h) = (-1, 0, 0, h).$$

i) Scrivere le equazioni parametriche dei piani vettoriali (sottospazi di \mathbf{C}^4)

$$\alpha = \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2 \rangle, \quad \beta(h) = \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2(h) \rangle,$$

e stabilire per quali valori di h risulta $\alpha \cap \beta(h) \neq \{\vec{0}\}$, e per quali h risulta invece $\alpha \cap \beta(h) = \{\vec{0}\}$.

Si consideri poi lo spazio proiettivo $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^3 = P(\mathbf{C}^4)$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, e in esso i quattro punti

$$P_1 = [0, i, 0, i], P_2 = [1, 1, 0, 0], Q_1 = [0, 0, 1, 0], Q_2(h) = [-1, 0, 0, h].$$

ii) Scrivere le equazioni parametriche in $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^3$ delle rette proiettive rispettivamente r individuata da P_1, P_2 e $s(h)$ individuata da $Q_1, Q_2(h)$. Scrivere quindi le equazioni cartesiane delle stesse rette r e $s(h)$.

iii) Interpretare nello spazio $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^3$ la risposta data sopra al punto i) : cosa si può dire della posizione reciproca delle rette r e $s(h)$ al variare di h ?

-o-

Svolgimento (anche sul retro!):

-o-

Risposte: eq. parametriche α eq. parametriche $\beta(h)$

h con $\alpha \cap \beta(h) \neq \{\vec{0}\}$ h con $\alpha \cap \beta(h) = \{\vec{0}\}$

eq. parametriche r eq. parametriche $s(h)$

eq. cartesiane r eq. cartesiane $s(h)$

N.B. La risposta al punto iii) va data nello Svolgimento!