Geometria I - Canale M-Z - Prof. P. Piccinni

Prima prova in itinere - 10 aprile 2017

Compito B

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	10	
2	10	
3	10	
Totale	30	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30: ☐

Esercizio 1. Sia $V^3_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_{\leq 2}[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2;\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti in $\mathbf{R}$.

Si consideri l'applicazione:

$$b : \mathbf{R}_{\leq 2}[x] \times \mathbf{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbf{R},$$

evidentemente una forma bilineare simmetrica, definita dalla formula

$$b(p(x), q(x)) = p(1)q(1) + p(-1)q(-1) + 3p(0)q(0),$$

dove $p(1), q(1), p(-1), q(-1), p(0), q(0)$ denota il valore del poilnomio per i valori indicati di x.

i) Verificare che b è definita positiva, dunque un prodotto scalare in $\mathbf{R}_{\leq 2}[x]$.

ii) Scrivere la matrice A di b rispetto alla base standard $\mathbb{E} = (1, x, x^2)$ di $\mathbf{R}_{\leq 2}[x]$, e determinare gli autovalori di A.

iii) A è diagonalizzabile per similitudine? E per congruenza? Esiste una matrice C ortogonale tale che C^tAC sia diagonale? Esiste una matrice ortogonale G tale che G^tAG sia la matrice identica?

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Svolgimento (anche sul retro!):

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Risposte: N.B. La verifica che b è definita positiva deve essere fatta nello Svolgimento!

$A =$ $\boxed{}$ Autovalori di A: $\boxed{}$

A diag. per similitudine? $\boxed{}$ A diag. per congruenza? $\boxed{}$

Esiste C? $\boxed{}$ Esiste G? $\boxed{}$

Esercizio 2. Si consideri lo spazio vettoriale $V^4_{\mathbf{R}} = M_2(\mathbf{R})$ delle matrici 2×2 ad elementi in $\mathbf{R}$ e su esso l'operatore lineare $T : V^4_{\mathbf{R}} \to V^4_{\mathbf{R}}$ definito da

$$T(A) = A - tr(A)I,$$

essendo $tr(A)$ la traccia di $A \in M_2(\mathbf{R})$ e I la matrice identica.

i) Determinare $\ker T$ e $\operatorname{im} T$ (giustificando, qui e in tutto il compito, nello Svolgimento la risposta data).

ii) Scrivere la matrice $B \in M_4(\mathbf{R})$ associata a T nella base canonica di $M_2(\mathbf{R})$.

iii) Determinare autovalori e autospazi di T.

iv) Stabilire se T è diagonalizzabile.

v) B è simmetrica? Ha senso considerare B come matrice di una forma bilineare $b : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$? Tale b è un prodotto scalare definito positivo?

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Svolgimento (anche sul retro!):

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Risposte: $\ker T =$ $\qquad$ $\operatorname{im} T =$ $\qquad$ Matrice B:

Autovalori: $\qquad$ Autospazi: $\qquad$ T diagonalizzabile?

B simmetrica? $\qquad$ B di una forma bilineare b? $\qquad$ b def. positiva?

Esercizio 3. Si considerino in $\mathbf{C}^4$ i quattro vettori

$$\vec{p}_1 = (0, i, 0, i),\ \vec{p}_2 = (0, 0, 1, 0),\ \vec{q}_1 = (1, 1, 0, 0),\ \vec{q}_2(h) = (-1, 0, 0, h).$$

i) Scrivere le equazioni parametriche dei piani vettoriali (sottospazi di $\mathbf{C}^4$)

$$\alpha = < \vec{p}_1, \vec{p}_2 >, \qquad \beta(h) = < \vec{q}_1, \vec{q}_2(h) >,$$

e stabilire per quali valori di h risulta $\alpha \cap \beta(h) \neq \{\vec{0}\}$, e per quali h risulta invece $\alpha \cap \beta(h) = \{\vec{0}\}$.

Si consideri poi lo spazio proiettivo $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}} = P(\mathbf{C}^4)$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, e in esso i quattro punti

$$P_1 = [0, i, 0, i],\ P_2 = [0, 0, 1, 0],\ Q_1 = [1, 1, 0, 0],\ Q_2(h) = [-1, 0, 0, h].$$

ii) Scrivere le equazioni parametriche in $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$ delle rette proiettive rispettivamente r individuata da P_1, P_2 e $s(h)$ individuata da $Q_1, Q_2(h)$. Scrivere quindi le equazioni cartesiane delle stesse rette r e $s(h)$.

iii) Interpretare nello spazio $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$ la risposta data sopra al punto i) : cosa si può dire della posizione reciproca delle rette r e $s(h)$ al variare di h?

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Svolgimento (anche sul retro!):

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Risposte: eq. parametriche α

eq. parametriche $\beta(h)$

h con $\alpha \cap \beta(h) \neq \{\vec{0}\}$

h con $\alpha \cap \beta(h) = \{\vec{0}\}$

eq. parametriche r

eq. parametriche $s(h)$

eq. cartesiane r

eq. cartesiane $s(h)$

N.B. La risposta al punto iii) va data nello Svolgimento!