Nome e Cognome: ....

Numero di matricola: ....

Geometria I (Canale M-Z, Prof. P. Piccinni) - Prova scritta del 19.1.2018

Norme per le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito nome, cognome, e numero di matricola su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove non si possono consultare testi e appunti, né utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **2 ore e 30 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	10	
2	10	
3	10	
Totale	30	

DARE INDICAZIONE DEL PROCEDIMENTO E CALCOLI ANCHE UTILIZZANDO IL RETRO DI OGNI SINGOLO FOGLIO

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E} = (\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1))$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

i) Scrivere, utilizzando tre opportuni parametri (a,b,c), la matrice $A_{(a,b,c)}$ associata nella base $\mathbb{E}$ a tutti gli operatori lineari $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che $T(\vec{e}_2) = \vec{e}_2,\ T(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$.

ii) Stabilire per quali valori di (a,b,c) l'operatore lineare T è <u>non</u> iniettivo.

iii) Stabilire per quali valori di (a,b,c) l'operatore lineare T è <u>non</u> iniettivo e ammette l'autovalore 3.

iv) Stabilire per quali valori di (a,b,c) l'operatore lineare T è <u>non</u> iniettivo e <u>non</u> diagonalizzabile.

Esercizio 2. Nello spazio proiettivo $\mathbb{R}P^3$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, si considerino i punti

$$A = [0, 1, 1, 0], \quad B = [1, 0, 1, 0], \quad C = [1, -1, 0, 1], \quad D = [0, 2, 2, -1],$$

e i piani

$$\alpha : x_1 + x_2 = 0, \quad \beta : x_0 + x_2 = 0, \quad \gamma : x_0 - x_1 + x_3 = 0, \quad \delta : 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0.$$

i) Verificare che i punti A, B, C, D sono complanari e scrivere l'equazione cartesiana del piano π che li contiene.

ii) Verificare che i piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ si intersecano in un punto P e scrivere le coordinate omogenee di P.

iii) Si osservi che (se la soluzione è corretta) il punto P ha coordinate uguali o proporzionali ai coefficienti dell'equazione di π. Si poteva prevedere ciò senza fare calcoli?

iv) I cinque punti A, B, C, D, P costituiscono un riferimento proiettivo in $\mathbb{R}P^3$?

Esercizio 3. Si considerino, nel piano affine reale $A^2_{\mathbb{R}}$, con coordinate (xy), le coniche:

$$\mathcal{D}: \; F(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0, \qquad \mathcal{E}: \; G(x,y) = xy - 1 = 0.$$

e il fascio di coniche

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu} : \lambda F + \mu G = 0.$$

i) Stabilire pa quali valori di λ, μ la conica $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ è generale e per quali valori è degenere.

ii) Stabilire pa quali valori di λ, μ la conica $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ è un'ellissi generale, per quali valori è un'iperbole generale e per quali è una parabola generale.

iii) Si determinino quindi le coordinate dei punti di intersezione $\mathcal{D} \cap \mathcal{E}$ e si disegnino le coniche $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ e le coniche degeneri del fascio di cui al punto i).