Geometria I - Canale M-Z - Prof. P. Piccinni

Risposte prima prova in itinere - 10 aprile 2017

Compito A

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale $V^4_{\mathbf{R}} = M_2(\mathbf{R})$ delle matrici 2×2 ad elementi in $\mathbf{R}$ e su esso l'operatore lineare $T : V^4_{\mathbf{R}} \to V^4_{\mathbf{R}}$ definito da

$$T(A) = A + tr(A)I,$$

essendo $tr(A)$ la traccia di $A \in M_2(\mathbf{R})$ e I la matrice identica.

i) Determinare $\ker T$ e $\operatorname{im} T$ (giustificando, qui e in tutto il compito, nello Svolgimento la risposta data).

ii) Scrivere la matrice $B \in M_4(\mathbf{R})$ associata a T nella base canonica di $M_2(\mathbf{R})$.

iii) Determinare autovalori e autospazi di T.

iv) Stabilire se T è diagonalizzabile.

v) B è simmetrica? Ha senso considerare B come matrice di una forma bilineare $b : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$? Tale b è un prodotto scalare definito positivo?

Risposte: $\ker T = \boxed{\{\vec{0}\}}$ $\quad \operatorname{im} T = \boxed{V^4_{\mathbf{R}} = M_2(\mathbf{R})}$ $\quad$ Matrice $B = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

Autovalori: $\boxed{1,\ 3}$ $\quad$ Autospazi: $\boxed{V_1 : a_{11} + a_{22} = 0,\ V_3 : a_{11} - a_{22} = a_{12} = a_{21} = 0,}$ $\quad$ T diagonalizzabile? $\boxed{si}$

B simmetrica? $\boxed{si}$ $\quad$ B di una forma bilineare b? $\boxed{si}$ $\quad$ b def. positiva? $\boxed{si}$

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Esercizio 2. Sia $V^3_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_{\leq 2}[x] = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2;\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti in $\mathbf{R}$.

Si consideri l'applicazione:

$$b : \mathbf{R}_{\leq 2}[x] \times \mathbf{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbf{R},$$

evidentemente una forma bilineare simmetrica, definita dalla formula

$$b(p(x), q(x)) = p(1)q(1) + p(-1)q(-1) + 2p(0)q(0),$$

dove $p(1), q(1), p(-1), q(-1), p(0), q(0)$ denota il valore del poilnomio per i valori indicati di x.

i) Verificare che b è definita positiva, dunque un prodotto scalare in $\mathbf{R}_{\leq 2}[x]$.

ii) Scrivere la matrice A di b rispetto alla base standard $\mathbb{E} = (1, x, x^2)$ di $\mathbf{R}_{\leq 2}[x]$, e determinare gli autovalori di A.

iii) A è diagonalizzabile per similitudine? E per congruenza? Esiste una matrice C ortogonale tale che $C^t AC$ sia diagonale? Esiste una matrice ortogonale G tale che $G^t AG$ sia la matrice identica?

Risposte: $A = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$ $\quad$ Autovalori di A : $\boxed{2,\ 3 \pm \sqrt{5}}$

A diag. per similitudine? $\boxed{si}$ $\quad$ A diag. per congruenza? $\boxed{si}$ $\quad$ Esiste C? $\boxed{si}$ $\quad$ Esiste G? $\boxed{no}$

Esercizio 3. Si considerino in $\mathbf{C}^4$ i quattro vettori

$$\vec{p}_1 = (0, i, 0, i),\ \vec{p}_2 = (1, 1, 0, 0),\ \vec{q}_1 = (0, 0, 1, 0),\ \vec{q}_2(h) = (-1, 0, 0, h).$$

i) Scrivere le equazioni parametriche dei piani vettoriali (sottospazi di $\mathbf{C}^4$)

$$\alpha =< \vec{p}_1, \vec{p}_2 >, \qquad \beta(h) =< \vec{q}_1, \vec{q}_2(h) >,$$

e stabilire per quali valori di h risulta $\alpha \cap \beta(h) \neq \{\vec{0}\}$, e per quali h risulta invece $\alpha \cap \beta(h) = \{\vec{0}\}$.

Si consideri poi lo spazio proiettivo $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}} = P(\mathbf{C}^4)$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, e in esso i quattro punti

$$P_1 = [0, i, 0, i],\ P_2 = [1, 1, 0, 0],\ Q_1 = [0, 0, 1, 0],\ Q_2(h) = [-1, 0, 0, h].$$

ii) Scrivere le equazioni parametriche in $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$ delle rette proiettive rispettivamente r individuata da P_1, P_2 e $s(h)$ individuata da $Q_1, Q_2(h)$. Scrivere quindi le equazioni cartesiane delle stesse rette r e $s(h)$.

iii) Interpretare nello spazio $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$ la risposta data sopra al punto i) : cosa si può dire della posizione reciproca delle rette r e $s(h)$ al variare di h?

Risposte:

eq. parametriche α : $\boxed{x_0 = t_2,\ x_1 = it_1 + t_2,\ x_2 = 0,\ x_3 = it_1}$

eq. parametriche $\beta(h)$: $\boxed{x_0 = -t_2,\ x_1 = 0,\ x_2 = t_1,\ x_3 = ht_2}$

h con $\alpha \cap \beta(h) \neq \{\vec{0}\}$: $\boxed{h = 1}$

h con $\alpha \cap \beta(h) = \{\vec{0}\}$: $\boxed{h \neq 1}$

eq. parametriche r : $\boxed{x_0 = t_2,\ x_1 = it_1 + t_2,\ x_2 = 0,\ x_3 = it_1}$

eq. parametriche $s(h)$: $\boxed{x_0 = -t_2,\ x_1 = 0,\ x_2 = t_1,\ x_3 = ht_2}$

eq. cartesiane r : $\boxed{x_2 = 0,\ x_0 - x_1 + x_3 = 0}$

eq. cartesiane $s(h)$: $\boxed{x_1 = 0,\ hx_0 + x_3 = 0}$