Geometria I - Canale M-Z - Prof. P. Piccinni

Risposte seconda prova in itinere - 5 giugno 2017

Esercizio 1. Siano $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ coordinate omogenee nello spazio proiettivo $P^5_{\mathbb{R}}$. Si considerino in $P^5_{\mathbb{R}}$ i seguenti punti:

$$R_0 = [1,0,0,1,0,0], \qquad R_1 = [0,1,2,0,1,1], \qquad S_0 = [0,0,2,0,0,1], \qquad S_1 = [1,1,0,1,1,0].$$

i) Scrivere le equazioni parametriche delle rette rispettivamente r passante per i punti R_0 e R_1, e s passante per i punti S_0 e S_1 (si usino in entrambi i casi due parametri omogenei, denotandoli con λ, μ per la retta r e con λ', μ' per la retta s).

ii) Verificare che le rette r e s si intersecano in un punto P e scrivere le coordinate omogenee di P.

iii) Indicare un procedimento per scrivere (o scrivere direttamente) le equazioni cartesiane del piano proiettivo $\alpha \subset P^5_{\mathbb{R}}$ contenente le retta r e s.

Si considerino poi in $P^5_{\mathbb{R}}$ i seguenti iperpiani:

$$\rho_0 : x_0 + x_3 = 0, \qquad \rho_1 : x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 0, \qquad \sigma_0 : 2x_2 + x_5 = 0, \qquad \sigma_1 : x_0 + x_1 + x_3 + x_4 = 0,$$

e i fasci di iperpiani

$$\mathcal{F}_\rho : \lambda\rho_0 + \mu\rho_1, \qquad \mathcal{F}_\sigma : \lambda'\sigma_0 + \mu'\sigma_1.$$

iv) Verificare che i due fasci $\mathcal{F}_\rho, \mathcal{F}_\sigma$ hanno un iperpiano π in comune. Scrivere l' equazione cartesiana di π.

Risposte: equazioni parametriche di r : $\boxed{x_0 = \lambda, x_1 = \mu, x_2 = 2\mu, x_3 = \lambda, x_4 = \mu, x_5 = \mu}$

equazioni parametriche di s : $\boxed{x_0 = \mu', x_1 = \mu', x_2 = 2\lambda', x_3 = \mu', x_4 = \mu', x_5 = \lambda'}$

punto $P = \boxed{[1,1,2,1,1,1]}$

equazioni cartesiane di α : $\boxed{x_0 = x_3, x_1 = x_4, x_2 = 2x_5}$

equazione cartesiana di π : $\boxed{x_0 + x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0}$

Esercizio 2. Si considerino in $P^2_{\mathbb{R}}$, usando coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, le seguenti coniche:

$$\mathcal{C}_0 : x_0^2 + 2x_0x_1 = 0, \quad \mathcal{C}_1 : x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_0x_2 + 2x_1x_2 = 0, \quad \mathcal{D}_0 : 2x_2^2 + 2x_1x_2 = 0, \quad \mathcal{D}_1 : x_0^2 + x_1^2 + 2x_0x_1 + 2x_0x_2 = 0,$$

e i fasci di coniche

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}} : \lambda\mathcal{C}_0 + \mu\mathcal{C}_1, \qquad \mathcal{F}_{\mathcal{D}} : \lambda'\mathcal{D}_0 + \mu'\mathcal{D}_1.$$

i) Verificare che i due fasci hanno una conica $\mathcal{E}$ in comune, scrivere l'equazione cartesiana di $\mathcal{E}$ e stabilire il tipo proiettivo di $\mathcal{E}$ tra i cinque possibili in $P^2_{\mathbb{R}}$.

ii) Determinare le coniche degeneri del fascio $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$.

iii) Determinare le coniche degeneri del fascio $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$.

Risposte: equazione cartesiana di $\mathcal{E}$: $\boxed{x_0^2 + x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + 2x_1x_2 = 0}$

tipo proiettivo di $\mathcal{E}$: $\boxed{x_0^2 + x_1^2 = 0 \text{ (conica semplicemente degenere con un solo punto reale)}}$

coniche degeneri in $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$: $\boxed{\mathcal{C}_0, \mathcal{E}, \mathcal{C}_0 + 2\mathcal{C}_1}$

coniche degeneri in $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$: $\boxed{\mathcal{D}_0, \mathcal{E}}$

Esercizio 3. Sia $\mathbf{E^2}$ il piano euclideo, e siano (xy) coordinate cartesiane su di esso relative ad un riferimento cartesiano ortonormale. Si ricordi che le isometrie dirette si esprimono analiticamente in $\mathbf{E^2}$ mediante sistemi del tipo:

$$(1) \quad \begin{cases} x &= c_{11}x' & +c_{12}y' & +b_1 \\ y &= c_{21}x' & +c_{22}y' & +b_2 \end{cases}$$

essendo $C = (c_{\alpha\beta})$ una matrice ortogonale con $\det C = 1$, e $\vec{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$.

Si considerino in $\mathbf{E^2}$ le seguenti iperboli:

$$\mathcal{I} : x^2 - y^2 = 1, \qquad \mathcal{I}' : xy = 1, \qquad \mathcal{I}'' : y^2 - x^2 = 1, \qquad \mathcal{I}''' : xy = -1,$$

e le seguenti parabole:

$$\mathcal{P} : x = y^2, \qquad \mathcal{P}' : y = x^2 + 1, \qquad \mathcal{P}'' : x = -y^2 - 1, \qquad \mathcal{P}''' : y = -x^2 + 1.$$

i) Scrivere le due isometrie di tipo (1) che consentono di trasformare rispettivamente $\mathcal{I} \to \mathcal{I}''$, $\mathcal{I}' \to \mathcal{I}'''$.

ii) Scrivere le tre isometrie di tipo (1) che consentono di trasformare rispettivamente $\mathcal{P} \to \mathcal{P}'$, $\mathcal{P} \to \mathcal{P}''$, $\mathcal{P} \to \mathcal{P}'''$.

iii) Scrivere, in coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, attraverso le trasformazioni $x = x_1/x_0, y = x_2/x_0$ e moltiplicando per x_0^2, le equazioni delle chiusure proiettive $\overline{\mathcal{I}}$, $\overline{\mathcal{P}}$ rispettivamente di $\mathcal{I}$ e di $\mathcal{P}$.

iv) Ricordando l'espressione analitica delle proiettività

$$(2) \quad \begin{cases} x_0 &= a_{00}x_0' + & a_{01}x_1' + & a_{02}x_2' \\ x_1 &= a_{10}x_0' + & a_{11}x_1' + & a_{12}x_2' \\ x_2 &= a_{20}x_0' + & a_{21}x_1' + & a_{22}x_2' \end{cases}$$

(con $(a_{\alpha\beta})$ non singolare), scrivere infine le equazioni di una proiettività che manda $\overline{\mathcal{I}} \to \overline{\mathcal{P}}$.

Risposte: $\mathcal{I} \to \mathcal{I}''$: $\boxed{x = y', y = -x'}$

$\mathcal{I}' \to \mathcal{I}'''$: $\boxed{x = y', y = -x'}$

$\mathcal{P} \to \mathcal{P}'$: $\boxed{x = y' - 1, y = -x'}$

$\mathcal{P} \to \mathcal{P}''$: $\boxed{x = -x' - 1, y = -y'}$

$\mathcal{P} \to \mathcal{P}'''$: $\boxed{x = -y' + 1, y = x'}$

$\overline{\mathcal{I}}$: $\boxed{x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0}$

$\overline{\mathcal{P}}$: $\boxed{x_0x_1 - x_2^2 = 0}$

$\overline{\mathcal{I}} \to \overline{\mathcal{P}}$: $\boxed{x_0 = \frac{x_0' - x_1'}{2}, x_1 = \frac{x_0' + x_1'}{2}, x_2 = x_2'}$