Nome e Cognome: ....

Numero di matricola: ....

Geometria I (Canale M-Z, Prof. P. Piccinni) - Prova scritta del 17.7.2017

Norme per le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito nome, cognome, e numero di matricola su questo foglio.

2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.

3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**

4. Durante le prove non si possono consultare testi e appunti, né utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.

5. La durata della prova è di **2 ore e 30 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	10	
2	10	
3	10	
Totale	30	

DARE INDICAZIONE DEL PROCEDIMENTO E CALCOLI ANCHE UTILIZZANDO IL RETRO DI OGNI SINGOLO FOGLIO

Esercizio 1. Si consideri la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

i) Si mostri che A è idempotente, ovvero che tutte le sue potenze $A^n = AA \dots A$ (n volte) coincidono con A.

ii) Si determinino gli autovalori di A e si scriva la matrice diagonale D simile ad A.

iii) Si determini una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

iv) Si consideri quindi l'operatore lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di proiezione ortogonale dei vettori $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sul piano vettoriale $\alpha : x + y + z = 0$. Scrivere la matrice B associata a T nella base canonica $\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ di $\mathbb{R}^3$.

v) Stabilire se T è diagonalizzabile e scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T.

Esercizio 2. Nello spazio proiettivo $\mathbb{R}P^3$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x_0 - x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_0 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x_0 - 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 + x_3 = 0 \end{cases} \quad , \quad t : \begin{cases} x_0 - x_1 - 2x_3 = 0 \\ 2x_0 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \quad .$$

i) Verificare che le rette r, s, t sono a due a due incidenti e determinare le coordinate omogenee dei punti $A = r \cap s, B = s \cap t, C = t \cap r$.

ii) Scrivere l'equazione cartesiana del piano $\pi \subset \mathbb{R}P^3$ contenente i punti A, B, C. Il piano π contiene anche le rette r, s, t?

iii) Completare la terna A, B, C a una quaterna A, B, C, U che costituisca sul piano π un riferimento proiettivo.

Esercizio 3. Si considerino, nei piani affini reale $A^2_{\mathbb{R}}$ e complesso $A^2_{\mathbb{C}}$, le parabole:

$$\mathcal{P}:\ y = x^2, \qquad \mathcal{P}':\ x = y^2,$$

e il fascio di coniche

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu} = \lambda\mathcal{P} + \mu\mathcal{P}' : \lambda(y - x^2) + \mu(x - y^2) = 0.$$

i) Determinare, separatamente nei due casi di $A^2_{\mathbb{R}}$ e di $A^2_{\mathbb{C}}$, i valori di (λ, μ) per cui la conica $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ è degenere.

ii) Determinare i valori di (λ, μ) per cui la conica $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ è a centro in $A^2_{\mathbb{C}}$.

iii) Determinare i valori di (λ, μ) per cui la conica $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ è un'ellisse, una parabola e un iperbole in $A^2_{\mathbb{R}}$.