Geometria I (Canale M-Z, Prof. P. Piccinni) - Soluzioni della prova scritta del 17.7.2017

Esercizio 1. Si consideri la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

i) Si mostri che A è idempotente, ovvero che tutte le sue potenze $A^n = AA \dots A$ (n volte) coincidono con A.

ii) Si determinino gli autovalori di A e si scriva la matrice diagonale D simile ad A.

iii) Si determini una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

iv) Si consideri quindi l'operatore lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di proiezione ortogonale dei vettori $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sul piano vettoriale $\alpha : x + y + z = 0$. Scrivere la matrice B associata a T nella base canonica $\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ di $\mathbb{R}^3$.

v) Stabilire se T è diagonalizzabile e scrivere una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T.

Soluzione i), ii) e iii). Si pu naturalmente verificare direttamente che

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A,$$

e dunque induttivamente $A^n = A$ per ogni n.

Allo stesso risultato si arriva diagonalizzando, e quindi rispondendo simultaneamente ai quesiti ii) e iii). L'equazione caratteristica di A risulta:

$$\det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - t & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - t & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - t \end{pmatrix} = \Big(\frac{2}{3} - t\Big)\Big[\Big(\frac{2}{3} - t\Big)^2 - \frac{1}{9}\Big] + \frac{1}{3}\Big[-\frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3} - t\Big) - \frac{1}{9}\Big] - \frac{1}{3}\Big[\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3} - t\Big)\Big] =$$

$$= \Big(\frac{2}{3} - t\Big)\Big[\frac{1}{3} - \frac{4}{3}t + t^2\Big] + \frac{1}{3}\Big[-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t\Big] - \frac{1}{3}\Big[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}t\Big] = -t^3 + 2t^2 - 1 = -t(t-1)^2.$$

Gli autospazi $V_0 = \ker A$ e V_1 dei due autovalori $t = 0$ e $t = 1$ (quest'ultimo con molteplicità algebrica 2) si hanno subito dalle soluzioni dei sistemi lineari omogenei rispettivamente:

$$V_0 : \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad V_1 : \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Dunque V_0 è generato dal versore $\vec{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e V_1 dai due versori (ortogonali) $\vec{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e $\vec{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$: La matrice ortogonale che consente di passare a una base di autovettori è dunque

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

ovvero

$$C^t AC = C^{-1}AC = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque $A^2 = AA = CDC^{-1}CDC^{-1} = CDDC^{-1} = CDC^{-1} = A$.

iv), v). Si tratta dell'aspetto geometrico (o intrinseco) della matrice A. Gli autovettori $\vec{v}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ (genratore di $V_0 = \ker A$) e $\vec{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ e $\vec{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$ (generatori di V_1) costituiscono una base risp. della retta vettoriale $x = y = z$ e del piano vettoriale $\alpha : x + y + z = 0$ ad essa ortogonale. Dunque $A = B$ rappresenta la proiezione ortogonale T nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ e gli autovettori di T sono quelli già indicati per la matrice A.

Esercizio 2. Nello spazio proiettivo $\mathbb{R}P^3$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x_0 - x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_0 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} , \quad s : \begin{cases} x_0 - 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 + x_3 = 0 \end{cases} , \quad t : \begin{cases} x_0 - x_1 - 2x_3 = 0 \\ 2x_0 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} .$$

i) Verificare che le rette r, s, t sono a due a due incidenti e determinare le coordinate omogenee dei punti $A = r \cap s, B = s \cap t, C = t \cap r$.

ii) Scrivere l'equazione cartesiana del piano $\pi \subset \mathbb{R}P^3$ contenente i punti A, B, C. Il piano π contiene anche le rette r, s, t?

iii) Completare la terna A, B, C a una quaterna A, B, C, U che costituisca sul piano π un riferimento proiettivo.

Soluzione i) Le coordinate proiettive omogenee degli eventuali punti di intersezione $A = r \cap s, B = s \cap t, C = t \cap r$ sono le soluzioni non nulle dei seguenti rispettivi sistemi lineari omogenei:

$$r \cap s : \begin{cases} x_0 - x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_0 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_0 - 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 + x_3 = 0 \end{cases} , \quad s \cap t : \begin{cases} x_0 - 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 + x_3 = 0 \\ x_0 - x_1 - 2x_3 = 0 \\ 2x_0 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} , \quad t \cap r : \begin{cases} x_0 - x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_0 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_0 - x_1 - 2x_3 = 0 \\ 2x_0 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} .$$

Si ottiene pertanto $A = r \cap s = [1, 2, 3, -1], B = s \cap t = [1, 3, 5, -1], C = t \cap r = [1, 1, 2, 0]$.

ii) Il piano π consiste di tutti e soli i punti di $\mathbb{R}P^3$ le cui coordinate proiettive omogenee sono combinazioni lineari di quelle dei punti A, B, C. La sua equazione cartesiana risulta quindi

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

da cui, sviluppando il determinante:

$$\pi : \ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Per costruzione π, dovendo contenere i punti A, B, C, contiene anche le loro rette congiungenti r, s, t.

iii) I punti A, B, C sono dunque linearmente indipendenti. Per completarli a un riferimento proiettivo sul piano proiettivo π, è sufficiente aggiungere il "punto unità" $U = [3, 6, 10, -2]$, avente per coordinate omegenee la somma delle coordinate omogenee dei tre punti A, B, C.

Esercizio 3. Si considerino, nei piani affini reale $A^2_{\mathbb{R}}$ e complesso $A^2_{\mathbb{C}}$, le parabole:

$$\mathcal{P} : \ y = x^2, \qquad \mathcal{P}' : \ x = y^2,$$

e il fascio di coniche

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu} = \lambda\mathcal{P} + \mu\mathcal{P}' : \lambda(y - x^2) + \mu(x - y^2) = 0.$$

i) Determinare, separatamente nei due casi di $A^2_{\mathbb{R}}$ e di $A^2_{\mathbb{C}}$, i valori di (λ, μ) per cui la conica $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ è degenere.

ii) Determinare i valori di (λ, μ) per cui la conica $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ è a centro in $A^2_{\mathbb{C}}$.

iii) Determinare i valori di (λ, μ) per cui la conica $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ è un'ellisse, una parabola e un iperbole in $A^2_{\mathbb{R}}$.

Soluzione i) La matrice della conica $\mathcal{C}_{\lambda,\mu} = \lambda\mathcal{P} + \mu\mathcal{P}' : \lambda(y - x^2) + \mu(x - y^2) = 0$ risulta

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu}{2} & \frac{\lambda}{2} \\ \frac{\mu}{2} & -\lambda & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & 0 & -\mu \end{pmatrix},$$

e ha determinante $\frac{\lambda^3}{4} + \frac{\mu^3}{4}$. Le coniche degeneri del fascio si ottengono dunque quando

$$\lambda^3 + \mu^3 = (\lambda + \mu)(\lambda^2 - \lambda\mu + \mu^2) = 0.$$

Nel caso di $A^2_{\mathbb{R}}$ abbiamo dunque una sola conica degenere per $\lambda = -\mu$, ovvero (scegliendo $\lambda = -mu = 1$ la coppia di rette

$$x^2 - y - y^2 + x = (x - y)(x + y + 1) = 0.$$

Nel caso di $A^2_{\mathbb{C}}$ abbiamo invece, oltre alla precedente coppia di rette, altre due coniche degeneri, in corrispondenza delle soluzioni dell'equazione di secondo grado $(\lambda^2 - \lambda\mu + \mu^2) = 0$. Otteniamo dunque, a meno di un fattore complesso non nullo, $(\lambda, \mu) = (1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2})$. Le altre due coniche degeneri sono quindi:

$$2(y - x^2) + (1 \pm i\sqrt{3})(x - y^2) = 0.$$

ii) Guardando ancora alla matrice A, abbiamo che $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ è a centro in $A^2_{\mathbb{C}}$ quando $\lambda\mu \neq 0$. Si noti dunque che $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ sono le uniche parabole del fascio di coniche.

iii) In $A^2_{\mathbb{R}}$ abbiamo che $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ è un' ellisse per $\lambda\mu > 0$ e un' iperbole per $\lambda\mu < 0$.