Nome e Cognome: ....

Numero di matricola: ....

Geometria I (Canale M-Z, Prof. P. Piccinni) - Prova scritta del 22.9.2017

Norme per le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito nome, cognome, e numero di matricola su questo foglio.

2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.

3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**

4. Durante le prove non si possono consultare testi e appunti, né utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.

5. La durata della prova è di **2 ore e 30 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	10	
2	10	
3	10	
Totale	30	

DARE INDICAZIONE DEL PROCEDIMENTO E CALCOLI ANCHE UTILIZZANDO IL RETRO DI OGNI SINGOLO FOGLIO

Esercizio 1. Si consideri la forma bilineare simmetrica

$$b : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$$

definita da

$$b(\vec{z}, \vec{w}) = z_1 w_1 + (1+i) z_1 w_2 + (1+i) z_2 w_1 + 2i z_2 w_2,$$

essendo $\vec{z} = (z_1, z_2), \vec{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$.

i) Scrivere la matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ associata a b nella base canonica $\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)$ di $\mathbb{C}^2$.

ii) Stabilire, motivando la risposta, se esiste una $C \in M_2(\mathbb{C})$ invertibile tale $C^t A C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

iii) Determinare gli autovalori di A, con le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

iv) Stabilire, motivando la risposta, se esiste una $C \in M_2(\mathbb{C})$ invertibile tale $C^{-1} A C$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 2. Nello spazio proiettivo $\mathbb{R}P^3$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, si considerino i punti

$$A_1 = [1, 1, 0, 0],\ A_2 = [1, 0, 1, 0],\ A_3 = [1, 0, 0, 1],\ A_4 = [0, 1, 1, 1].$$

i) Verificare (con opportune considerazioni e/o calcoli) che i punti A_1, A_1, A_3, A_4 sono non complanari e che sono quindi vertici di un tetraedro $\mathbf{T}$.

ii) Scrivere le equazioni cartesiane dei quattro piani $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ di $\mathbb{R}P^3$ che formano le facce di $\mathbf{T}$.

iii) Scrivere le equazioni cartesiane delle sei rette $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ che formano i lati del tetraedro $\mathbf{T}$. Assumendo $x_0 = 0$ come equazione del piano "improprio" π_∞ di $\mathbb{R}P^3$, qualcuna tra le sei rette è contenuta in π_∞?

Esercizio 3. Si considerino, nel piano affine reale $A^2_{\mathbb{R}}$, con coordinate (xy), le coniche:

$$\mathcal{C}: \ x^2 + 2xy + 2x + 2y = 0, \qquad \mathcal{D}: \ x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0.$$

i) Determinare le coordinate dei due punti A e B in cui $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ si intersecano.

ii) Scrivere le equazioni della rette tangenti a $\mathcal{C}$ e a $\mathcal{D}$ nei punti A e B (quattro equazioni) e osservare eventuali coincidenze tra le quattro tangenti.

iii) Determinare il tipo affine di $\mathcal{C}$ e di $\mathcal{D}$ (generali o no, ellissi, iperboli, parabole).

iv) Stabilire se esiste un comune cambiamento di coordinate affini

$$x = a_{11}x' + a_{12}y' + b_1, \quad y = a_{21}x' + a_{22}y' + b_2$$

che consenta di scrivere simultaneamente le equazioni di $\mathcal{C}$ e di $\mathcal{D}$ in forma canonica affine nelle coordinate (x', y').