Geometria I (Canale M-Z, Prof. P. Piccinni) - Soluzioni della prova scritta del 22.9.2017

Esercizio 1. Si consideri la forma bilineare simmetrica

$$b : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$$

definita da

$$b(\vec{z}, \vec{w}) = z_1 w_1 + (1+i) z_1 w_2 + (1+i) z_2 w_1 + 2i z_2 w_2,$$

essendo $\vec{z} = (z_1, z_2), \vec{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$.

i) Scrivere la matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ associata a b nella base canonica $\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)$ di $\mathbb{C}^2$.

ii) Stabilire, motivando la risposta, se esiste una $C \in M_2(\mathbb{C})$ invertibile tale $C^t A C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

iii) Determinare gli autovalori di A, con le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

iv) Stabilire, motivando la risposta, se esiste una $C \in M_2(\mathbb{C})$ invertibile tale $C^{-1}AC$ sia una matrice diagonale.

Soluzione i) La matrice A ha per elementi i valori $b(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \in \mathbb{C}$, per $i, j = 1, 2$. Dunque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ i+1 & 2i \end{pmatrix}.$$

ii) La matrice A ha, come subito si vede, determinante nullo, e dunque rango 1. D'altra parte la sua seconda riga risulta proporzionale alla prima, con fattore di proporzionalità $1+i$. Essendo il rango invariante per la relazione di congruenza tra matrici, ne segue che il quesito ii) ha risposta negativa.

iii) +iv) Gli autovalori di A, zeri del polinomio caratteristico $\det \begin{pmatrix} 1-t & 1+i \\ i+1 & 2i-t \end{pmatrix}$, sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1+2i$. Essendo essi distinti, le loro molteplicità (algebrica e geometrica) sono entrambe 1. Pertanto A è simile alla matrice diagonale che ha sulla diagonale principale gli autovalori 0 e $1+2i$.

Esercizio 2. Nello spazio proiettivo $\mathbb{R}P^3$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, si considerino i punti

$$A_1 = [1,1,0,0],\ A_2 = [1,0,1,0],\ A_3 = [1,0,0,1],\ A_4 = [0,1,1,1].$$

i) Verificare (con opportune considerazioni e/o calcoli) che i punti A_1, A_2, A_3, A_4 sono non complanari e che sono quindi vertici di un tetraedro $\mathbf{T}$.

ii) Scrivere le equazioni cartesiane dei quattro piani $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ di $\mathbb{R}P^3$ che formano le facce di $\mathbf{T}$.

iii) Scrivere le equazioni cartesiane delle sei rette $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ che formano i lati del tetraedro $\mathbf{T}$. Assumendo $x_0 = 0$ come equazione del piano "improprio" π_∞ di $\mathbb{R}P^3$, qualcuna tra le sei rette è contenuta in π_∞?

Soluzione i) Scrivendo la seguente matrice, che ha per righe le coordinate proiettive omogenee dei quattro punti assegnati:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

si vede subito che $\det A \neq 0$, e pertanto i quattro punti sono non complanari.

ii) Ognuno dei quattro piani $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ consiste dei punti $[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}P^3$ che sono complanari con tre dei quattro punti A_1, A_2, A_3, A_4. Pertanto le equazioni dei quattro piani sono:

$$\pi_1 : \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \text{ ovvero } x_0 + 2x_1 - x_2 - x_3 = 0;$$

$$\pi_2 : \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \text{ ovvero } -x_0 + x_1 - 2x_2 + x_3 = 0;$$

$$\pi_3 : \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \text{ ovvero } x_0 - x_1 - x_2 + 2x_3 = 0;$$

$$\pi_4 : \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0, \text{ ovvero } x_0 - x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

iii) Le equazioni delle sei rette si ottengono dunque mettendo a sistema, a due a due, le quattro equazioni

$$\pi_1 : x_0 + 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \quad \pi_2 : -x_0 + x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,$$

$$\pi_3 : x_0 - x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \quad \pi_4 : x_0 - x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

Poiché $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ sono le rette che congiungono, a due a due, i punti A_1, A_2, A_3, A_4, e poiché uno solo (l'ultimo) di tale punti è sul piano improprio π_∞, nessuna delle sei rette può essere contenuta in tale piano.

Esercizio 3. Si considerino, nel piano affine reale $A^2_{\mathbb{R}}$, con coordinate (xy), le coniche:

$$\mathcal{C} : \; x^2 + 2xy + 2x + 2y = 0, \qquad \mathcal{D} : \; x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0.$$

i) Determinare le coordinate dei due punti A e B in cui $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ si intersecano.

ii) Scrivere le equazioni della rette tangenti a $\mathcal{C}$ e a $\mathcal{D}$ nei punti A e B (quattro equazioni) e osservare eventuali coincidenze tra le quattro tangenti.

iii) Determinare il tipo affine di $\mathcal{C}$ e di $\mathcal{D}$ (generali o no, ellissi, iperboli, parabole).

iv) Stabilire se esiste un comune cambiamento di coordinate affini

$$x = a_{11}x' + a_{12}y' + b_1, \quad y = a_{21}x' + a_{22}y' + b_2$$

che consenta di scrivere simultaneamente le equazioni di $\mathcal{C}$ e di $\mathcal{D}$ in forma canonica affine nelle coordinate (x', y').

Soluzione. i) Il sistema

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2x + 2y = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

ha due soluzioni, entrambe doppie, $(0,0)$ e $(-2,0)$. Dunque $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ consiste dei due punti $O = (0,0)$ e $A = (-2,0)$.

ii) Posto

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2x + 2y = 0, \quad g(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y = 0,$$

possono calcolarsi le derivate parziali

$$f_x = 2x + 2y + 2,\ f_y = 2x + 2, \quad g_x = 2x + 2y + 2,\ g_y = 2x + 2y + 2,$$

che nei punti O e A valgono:

$$f_x(O) = 2, f_y(O) = 2, f_x(A) = -2, f_y(A) = -2, \quad g_x(O) = 2, g_y(O) = 2, g_x(A) = -2, g_y(A) = -2.$$

Le rette tangenti a $\mathcal{C}$ e a $\mathcal{D}$ nei due punti O e A sono pertanto:

$$r_{\mathcal{C}}(O) : 2x + 2y = 0,\ r_{\mathcal{C}}(A) : -2(x+2) - 2y = 0,\ r_{\mathcal{D}}(O) : 2x + 2y = 0,\ r_{\mathcal{D}}(A) : -2(x+2) - 2y = 0,$$

da cui le due coincidenze

$$r_{\mathcal{C}}(O) = r_{\mathcal{D}}(O)\ r_{\mathcal{C}}(A) = r_{\mathcal{D}}(A).$$

iii) I ranghi delle matrici $A_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $A_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, rispettivamente di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, sono sono rispettivamente 3 e 2. Pertanto $\mathcal{C}$ è generale, ed è un iperbole, essendo $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} < 0$. Invece $\mathcal{D}$ è una parabola semplicemente degenere, e consiste delle due rette $x + y = 0$ e $x + y + 2$, già trovate come sue rette tangenti in O e in A.

iv) Dato che le parti quadratiche dei polinomi rispettivamente $f(x,y)$ e $g(x,y)$ hanno ranghi diversi (risp. 2 e 1), la loro diagonalizzazione, e dunque la riduzione a forma canonica affine di $\mathcal{C}$ e di $\mathcal{D}$ non può aversi con un comune cambiamento di coordinate.