Geometria I - Canale M-Z

Prof. P. Piccinni

Prova scritta del 28 Giugno 2018

Nome e Cognome: ____

Numero di Matricola: __________________________

Norme per le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito nome, cognome, e numero di matricola su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove non si possono consultare testi e appunti, né utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **2 ore e 30 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	7	
3	8	
4	8	
Totale	30	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30:

Esercizio 1. Si consideri nello spazio euclideo $\mathbf{E}^3$, con coordinate cartesiane (x, y, z), i tre punti

$$P_1 = (2, 0, 0)\,, \quad P_2 = (0, 2, 0)\,, \quad P_3 = (0, 0, 2)\,.$$

1. Scrivere l'equazione cartesiana del piano α passante per P_1, P_2, P_3 e le equazioni parametriche della retta r passante per l'origine $O = (0, 0, 0)$ e perpendicolare a α.
2. Verificare che P_1, P_2, P_3 sono vertici di un triangolo equilatero Δ e calcolare l'area di Δ.
3. Determinare le coordinate dei due punti Q_1, Q_2 (necessariamente appartenenti alla retta r) tali che le quaterne P_1, P_2, P_3, Q_1 e P_1, P_2, P_3, Q_2 costituiscono i vertici di tetraedri regolari T_1 e T_2 in $\mathbf{E}^3$.
4. Determinare la distanza tra Q_1 e Q_2 e il volume dei tetraedri T_1 e T_2.

Svolgimento (anche sul retro!):

Risposte:

Eq. cart. α:

Eq. par. r:

Δ equilatero:

Area di Δ:

Q_1 e Q_2:

$d(Q_1, Q_2)$:

Volumi T_1 e T_2:

Esercizio 2. Si consideri nel piano proiettivo complesso $P^2(\mathbb{C})$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, i cinque punti

$$A = [1, -1, 0]\,, \quad B = [1, i, 0]\,, \quad C = [1, 0, -1]\,, \quad D = [0, -1, i] \quad E = [0, 1, -1]\,.$$

1. Verificare che tra A, B, C, D, E è possibile estrarre due terne costituite da tre punti allineati.
2. Stabilire quali tra le quaterne estraibili da A, B, C, D, E costituiscono un riferimento proiettivo in $P^2(\mathbb{C})$.
3. Esiste una conica $\mathcal{C}$ di $P^2(\mathbb{C})$ il cui supporto contiene i punti A, B, C, D, E ? In caso affermativo, tale $\mathcal{C}$ è unica? Sempre in caso affermativo, scrivere l'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$ e precisare se $\mathcal{C}$ è generale o degenere.
4. Determinare gli eventuali punti singolari di $\mathcal{C}$.

Svolgimento (anche sul retro!):

Risposte:

Le due terne: | Quali quaterne: | $\mathcal{C}$ esiste:

$\mathcal{C}$ è unica: | Eq. cart. $\mathcal{C}$: | $\mathcal{C}$ generale o degenere:

Rette componenti di $\mathcal{C}$: | Punti singolari di $\mathcal{C}$:

Esercizio 3. Si considerino nel piano euclideo $\mathbf{E}^2$, con coordinate cartesiane (x, y) le ellissi $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ di equazione cartesiana

$$\mathcal{E}_1 : \ f(x,y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0, \qquad \mathcal{E}_2 : \ g(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0,$$

e il fascio di coniche

$$\mathcal{C}_k : \ f(x,y) + kg(x,y) = 0.$$

1. Determinare le coordinate dei punti di intersezione tra $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$, precisando se tali punti appartengono a tutte le coniche $\mathcal{C}_k$ del fascio.
2. Nel fascio $\mathcal{C}_k$ vi sono coniche degeneri (ovvero spezzate in una coppia di rette) ? Quante ? Si può utilizzare la risposta al punto 1 per scrivere le equazioni delle rette componenti di tali coniche degeneri ?
3. Stabilire se esistono valori di k per cui $\mathcal{C}_k$: i) è una parabola non degenere, ii)è un'iperbole non degenere, iii) è una circonferenza.

Svolgimento (anche sul retro!):

Risposte: $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$: Appartengono a tutte le $\mathcal{C}_k$:

Coniche deg. del fascio: Loro rette componenti:

Parabole non degeneri: Iperboli non degeneri: Circonferenze:

Esercizio 4. Si considerino nello spazio affine reale $A^3(\mathbb{R})$, con coordinate affini (x, y, z) le rette r_1, r_2, r_3, r_4 di equazioni parametriche rispettivamente

$$r_1 : \begin{cases} x = 3t, \\ y = 0, \\ z = t, \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 0, \\ y = 2t, \\ z = t, \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} x = -3t, \\ y = 0, \\ z = t, \end{cases} \qquad r_4 : \begin{cases} x = 0, \\ y = -2t, \\ z = t. \end{cases}$$

1. Determinare i parametri direttori di r_1, r_2, r_3, r_4 e le coordinate dei punti P_1, P_2, P_3, P_4 loro rispettive intersezioni con il piano $z = 1$.
2. Si consideri poi la famiglia di rette r_θ di equazioni parametriche

$$r_\theta : \begin{cases} x = 3t\cos\theta, \\ y = 2t\sin\theta, \\ z = t, \end{cases}$$

$(0 \leq \theta < 2\pi)$, e si osservi che r_1, r_2, r_3, r_4 appartengono a tale famiglia rispettivamente per $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$. Si descriva la curva $\mathcal{C}$ descritta dai punti di intersezione P_θ delle rette r_θ con il piano $z = 1$.
3. Sia Γ la superficie quadrica (cono) di equazione cartesiana

$$\Gamma : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 0.$$

Si verifichi che le rette r_θ sono contenute nel cono Γ. Si faccia un disegno relativo ai punti 1,2,3.
4. Descrivere le curve $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ intersezioni del cono Γ con i piani rispettivamente $x = 3$ e $y = 2$.

Svolgimento (anche sul retro!):

Risposte:

Par. dir. r_1, r_2, r_3, r_4:

P_1, P_2, P_3, P_4:

Curva $\mathcal{C}$:

$\mathcal{D}$:

$\mathcal{E}$: