Cognome: .... **Nome:** ....

GEOMETRIA I (Canale I-Z, Prof. P. Piccinni) - Prova scritta del 24.7.2015

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome, nome su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove non si possono consultare testi e appunti, né utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **2 ore e 15 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	8	
3	7	
4	8	
Totale	30	

DARE INDICAZIONE DEL PROCEDIMENTO E CALCOLI ANCHE UTILIZZANDO IL RETRO DI OGNI SINGOLO FOGLIO

Esercizio 1. Si considerino le seguenti matrici in $M_2(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^4$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

e in $\mathbb{C}P^3 = (\mathbb{C}^4 - 0)/\sim$ i punti $P_1 = [A_1], P_2 = [A_2], P_3 = [A_3], P_4 = [A_4]$ proiettati risp. di A_1, A_2, A_3, A_4 tramite la proiezione $(\mathbb{C}^4 - 0) \longrightarrow \mathbb{C}P^3$.

i) Stabilire se i punti P_1, P_2, P_3, P_4 sono linearmente indipendenti.

ii) Determinare l'equazione del piano proiettivo π passante per P_1, P_2, P_3.

iii) Scrivere le equazioni cartesiane delle rette $r = P_1P_2$, $s = P_1P_3$, $t = P_2P_3$.

iv) Stabilire se r, s, t appartengono a uno stesso fascio di rette sul piano π.

Esercizio 2. Una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ si dice *normale* se risulta $A\bar{A}^t = \bar{A}^t A$, essendo $\bar{A}^t$ la trasposta coniugata di A.

i) Verificare che se A è hermitina ($A = \bar{A}^t$), o se A è antihermitiana ($A = -\bar{A}^t$), o ancora se A è unitaria (A invertibile e $A^{-1} = \bar{A}^t$), allora A è normale.

ii) Siano, per ognii $A \in M_n(\mathbb{C})$,

$$A_H = \frac{A + \bar{A}^t}{2}, \quad A_S = \frac{A - \bar{A}^t}{2}$$

Verificare che A_H è hermitiana, A_S è antihermitiana, e $A = A_H + A_S$.

iii) Mostrare che la matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ è normale se e solo se $A_H A_S = A_S A_H$.

Esercizio 3. Si considerino nel piano proiettivo complesso $\mathbb{C}P^2$ le coniche

$$\mathcal{C}_1 : x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 = 0,$$

$$\mathcal{C}_2 : x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - 2x_0x_1 = 0.$$

essendo $[x_0, x_1, x_2]$ coordinate omogenee.

i) Stabilire se $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ sono generali, semplicemente degeneri o doppiamente degeneri.

ii) Sia $\mathcal{C} = \lambda_1\mathcal{C}_1 + \lambda_2\mathcal{C}_2$. Determinare tra tali $\mathcal{C}$ (fascio di coniche generato da $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$) le eventuali coniche generali.

iii) Determinare i punti $P \in \mathbb{C}P^2$ che appartengono a tutte le coniche $\mathcal{C}$ del fascio.

Esercizio 4. Si considerino nel piano affine complesso, con coordinate omogenee (x, y) la curva algebrica

$$\mathcal{C} : f(x, y) = x^4 - x^2y^3 - x^2y^2 + y^5 - 2x^3 + 2xy^3 + 2x^2y - 2y^4 = 0.$$

i) Si determini la molteplicità per $\mathcal{C}$ dei punti $O = (0, 0)$ e $A = (1, 1)$, e scrivere in essi l'equazione della retta tangente (se i punti sono semplici) o delle tangenti principali (se i punti sono singolari).

ii) Dalla risposta la punto i) si può dedurre che $\mathcal{C}$ è riducibile? (motivare la risposta).

iii) Determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$, precisando se essi sono semplici o singolari.