Rappresentazione matriciale dell'applicazione lineare duale
(Significato intrinseco della trasposta di una matrice)

Esercizio. Sia

$$T : V \to W$$

un'applicazione lineare dallo spazio vettoriale $V = V_K^n$ allo spazio vettoriale $W = W_K^m$, entrambi sul campo K. Fissate basi $\mathbb{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ di V e $\mathbb{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots \vec{f}_m)$ di W, la matrice $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(K)$ associata a T in tali basi è definita dalla relazione matriciale

$$T(\mathbb{E}) = \mathbb{F}A,$$

dove $T(\mathbb{E}) = (T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2), \ldots, T(\vec{e}_n))$ e il prodotto $\mathbb{F}A$ è inteso riga per colonne.

Se $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ e $W = \mathrm{Hom}(W, K)$ sono i duali di V e di W con basi duali risp. $\mathbb{E}^* = (\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*, \ldots, \vec{e}_n^*)$ e $\mathbb{F}^* = (\vec{f}_1^*, \vec{f}_2^*, \ldots \vec{f}^* m)$, definite dalle relazioni

$$\vec{e}_i^*(\vec{e}_j) = \delta_{ij}, \qquad \vec{f}_h^*(\vec{f}_k) = \delta_{hk},$$

l'applicazione lineare

$$T^* : W^* \to V^*,$$

definita, per $\eta \in W^*$ e $\vec{v} \in V$, dalla formula

$$T^*(\eta)(\vec{v}) = \eta(T(\vec{v}))$$

si dice **applicazione lineare duale** di $T : V \to W$.

Se $A^* = (a_{ij}^*) \in M_{n,m}(K)$ è la matrice associata a $T^* : W^* \to V^*$ nelle basi $\mathbb{F}^*$ e $\mathbb{E}^*$, dimostrare che $A^* = A^t$, ovvero che $a_{ij}^* = a_{ji}$.

Svolgimento. Le matrici $A = (a_{ij})$ e $A^* = (a_{ij}^*)$ sono definite dalle relazioni

$$T(\vec{e}_i) = \vec{f}_1 a_{1i} + \vec{f}_2 a_{2i} + \cdots + \vec{f}_m a_{mi}, \qquad T^*(\vec{f}_k^*) = \vec{e}_1^* a_{1k}^* + \vec{e}_2^* a_{2k}^* + \cdots + \vec{e}_n^* a_{nk}^*,$$

per $i = 1, \ldots, n$ e $k = 1, \ldots, m$. Risulta dunque per ogni tale i e k:

$$T^*(\vec{f}_k^*)(\vec{e}_i) = (\vec{e}_1^* a_{1k}^* + \vec{e}_2^* a_{2k}^* + \cdots + \vec{e}_n^* a_{nk}^*)(\vec{e}_i) = a_{ik}^*,$$

e d'altra parte per la definizione dell'applicazione duale T^*:

$$T^*(\vec{f}_k^*)(\vec{e}_i) = \vec{f}_k^*(T(\vec{e}_i)) = \vec{f}_k^*(\vec{f}_1 a_{1i} + \vec{f}_2 a_{2i} + \cdots + \vec{f}_m a_{mi}) = a_{ki}.$$

Dal confronto tra le ultime due formule si ha quindi per ogni $i = 1, \ldots, n$ e ogni $k = 1, \ldots, m$:

$$a_{ik}^* = a_{ki},$$

ovvero $A^* = A^t$.