Geometria 1

Proff. Paolo Piazza - Paolo Piccinni

Prova scritta del 6.9.2018.

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	7	
4	7	
Totale	30	

ATTENZIONE:
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE **SPENTI** E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}_2[X]$ con base standard $\{1, X, X^2\}$ fissata. Consideriamo l'applicazione bilineare simmetrica

$$< p, q >:= p(0)q(0) + p(1)q(-1) + p(-1)q(1) + 3p'(0)q'(0)$$

dove p' denota la derivata.
1. Verificare che $< , >$ è definita positiva e definisce quindi un prodotto scalare.
2. Sia $T : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'operatore lineare definito da $T(p)(t) = p(t + 1)$.
Stabilire se T è simmetrico rispetto al prodotto scalare considerato.
Stabilire se T è unitario rispetto al prodotto scalare considerato.

Soluzione. (viene determinato l'aggiunto.....)
La matrice associata alla forma bilineare simmetrica nella base standard è

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Il criterio di Cartesio applicato al polinomio caratteristico di A, che è il polinomio $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 2$, dimostra che $< , >$ è definita positiva. La matrice associata all'operatore T nella base standard è

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Per determinare l'aggiunto di T, T^*, basta determinare la matrice M^* associata a T^* nella base standard.
Si ha, come al solito, che T^* è l'operatore aggiunto di T se e solo se $\forall p, q$:

$$< Tp, q >=< p, T^*q > \quad \text{se e solo se} \quad (M \begin{vmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{vmatrix})^T A \begin{vmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{vmatrix} = (\begin{vmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{vmatrix})^T A (M^* \begin{vmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{vmatrix}) \quad \text{se e solo se} \quad M^T A = AM^*$$

Quindi $M^* = A^{-1}M^T A$ da cui

$$M^* = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 9/2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Risposta:

Esercizio 2. Si risponda ai seguenti quesiti (reciprocamente indipendenti).
1. Piano proiettivo numerico $P^2(\mathbb{R})$ con coordinate proiettive omogenee X_0, X_1, X_2. Consideriamo i punti

$$P'_0 = [1, 2, 1]\,, \quad P'_1 = [2, 0, 1]\,, \quad P'_2 = [1, -2, 0]\,, \quad U' = [1, 0, 0].$$

Stabilire se esistono coordinate proiettive omogenee (Y_0, Y_1, Y_2) tali che i 4 punti dati abbiano coordinate rispettivamente $(1, 0, 0)\,,\ (0, 1, 0)\,,\ (0, 0, 1)\,,\ (1, 1, 1)$.
2. Spazio proiettivo numerico $P^3(\mathbb{R})$ con coordinate proiettive omogenee x_0, x_1, x_2, x_3. Consideriamo lo spazio affine $\mathcal{A}^3(\mathbb{R})$ e l'applicazione di passaggio a coordinate omogenee:

$$\mathcal{A}^3(\mathbb{R}) \ni (x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{j_0} [1, x_1, x_2, x_3] \in P^3(\mathbb{R}) \setminus H_0 \subset P^3(\mathbb{R})$$

con H_0 il piano proiettivo di equazone $X_0 = 0$. Si considerino le rette affini r e s di equazioni

$$r : x_1 + 2x_2 + x_3 = x_1 - x_3 + 5 = 0\,, \qquad s : 2x_1 - x_2 + 3 = x_1 - x_2 + 2 = 0.$$

Determinare l'equazione cartesiana del piano proiettivo passante per il punto $[1, 0, 0, 1]$ e per i punti impropri di r e s.

Soluzione: **1.** Falso: i primi tre punti sono allineati e quindi non sono linearmente indipendenti. Ne segue che i quattro punti non sono in posizione in generale e non possono essere assunti come punti fondamentali e punto unità di un nuovo riferimento.
2. Basta scrivere l'equazione cartesiana del piano proiettivo per il punto assegnato e per i punti impropri di r ed s. I parametri direttori di r sono $\ell = 1, m = -1, n = 1$ e quindi il punto improprio di r è $[0, 1, -1, 1]$. Analogamente il punto improprio di s è $[0, 0, 0, 1]$ e l'equazione del piano è quindi

$$\det \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e facendo i conti si ottiene $X_1 + X_2 = 0$.

Risposta:

Esercizio 3. Si consideri nel piano euclideo $\mathbf{E}^2$, con coordinate cartesiane (x, y) la famiglia di coniche $\mathcal{C}_k$ di equazione

$$\mathcal{C}_k : \ f(x, y) = kx^2 - 2kxy + ky^2 + 2x + 2y + 1 = 0,$$

essendo k un numero reale non nullo.

1. Stabilire per quali valori di k $\mathcal{C}_k$ è non degenere e per quali è un'ellissi, un'iperbole e una parabola.

2. Determinare, in funzione di k, i parametri metrici di $\mathcal{C}_k$ (semiassi per ellissi e iperboli, parametro per la parabola).

Svolgimento (anche sul retro!):

Risposte:

$\mathcal{C}_k$ non deg. per k: $\boxed{}$ $\mathcal{C}_k$ ellissi per k: $\boxed{}$ $\mathcal{C}_k$ iperbole per k: $\boxed{}$

$\mathcal{C}_k$ parabola per k: $\boxed{}$ Parametri metrici: $\boxed{}$

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{C}^3$ con il prodotto hermitiano canonico. Consideriamo gli operatori lineari $L_j := L_{A_j} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $j \in \{1, 2, 3\}$, definiti dalle seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{vmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{vmatrix}$$

1. Stabilire quali fra questi operatori sono hermitiani.
2. Stabilire quali fra questi operatori sono unitari.
3. Stabilire quali fra questi operatori sono diagonalizzabili.
4. Vero o Falso: esistono matrici invertibili M_1, M_2 e M_3 tali che

$$M_1 A_1 (M_1)^{-1} = M_2 A_2 (M_2)^{-1} = M_3 A_3 (M_3)^{-1}.$$

Soluzione:

Risposta: