Geometria I

Prof. P. Piccinni, Canale M-Z

Prova scritta del 19 Luglio 2018

Nome e Cognome: ____

Numero di Matricola: __________________________

Norme per le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito nome, cognome, e numero di matricola su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove non si possono consultare testi e appunti, né utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **2 ore e 30 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	7	
4	7	
Totale	30	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30: ☐

Esercizio 1. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

1. Stabilire se A è simmetrica, se è hermitiana e se è unitaria.
2. Stabilire se esiste una matrice $B \in GL(2, \mathbb{C})$ tale che $B^{-1}AB$ sia diagonale e in caso affermativo determinare una tale B.
3. Stabilire se esiste una matrice $C \in GL(2, \mathbb{C})$ tale che $C^t AC$ sia diagonale e in caso affermativo determinare una tale C.
4. Stabilire se la conica $\mathcal{C}$ di $A^2(\mathbb{C})$ di equazione

$$ix^2 + 2xy - iy^2 + 1 = 0$$

è generale o degenere e nel secondo caso scrivere le equazioni delle rette componenti.

Svolgimento (anche sul retro!):

Risposte:

A simmetrica: A hermitiana: A unitaria:

Matrice B: Matrice C: $\mathcal{C}$ generale o degenere:

Eventuali rette componenti di $\mathcal{C}$:

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico $<\,,\,>$. Sia $P \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ l'operatore L_A con

$$A := \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \tag{1}$$

1. Verificare che P è un operatore di proiezione ortogonale su un sottospazio W. Determinare equazioni cartesiane per W e per $W^{\perp}$.

Sia $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$b(\underline{v}, \underline{u}) :=< P\underline{u}, \underline{v} >$$

2. Verificare che b è una forma bilineare simmetrica.
3. Determinare la segnatura di b e una base di Sylvester per b.
4. Sia U il piano di equazioni cartesiane $x_1 - x_3 = 0\,, \quad x_2 - x_4 = 0\,$. Sia $b' : U \times U \to \mathbb{R}$ la restrizione di b a U: determinare gli indici di nullità, positività e negatività di b'.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 3. Si consideri nello spazio proiettivo reale $P^3(\mathbb{R})$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, i cinque punti

$$A = [1, 0, 1, 0]\,, \quad B = [3, -1, 1, 0]\,, \quad C = [0, 1, 1, 1]\,, \quad D = [3, 2, 4, 3] \quad E = [1, 1, 1, 0]\,.$$

1. Verificare che tre fra i punti A, B, C, D, E sono allineati e scrivere le equazioni cartesiane della retta r che li contiene.
2. Stabilire se esiste un piano π che contenga A, B, C, D, E.
3. Si considerino poi i piani

$$\alpha : x_0 + x_2 = 0,\ \beta : 3x_0 - x_1 + x_2 = 0,\ \gamma : x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ \delta : 3x_0 + 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0,\ \epsilon : x_0 + x_1 + x_2 = 0.$$

Utilizzando il principio di dualità, si può affermare che tre fra i piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ contengono la stessa retta? Perché?

Svolgimento (anche sul retro!):

Risposte:

I tre punti allineati: | | Equazioni r: | | Esiste π?: | | Quesito 3: | |

Esercizio 4. Piano affine $A^2(\mathbb{R})$ con coordinate x, y rispetto ad un fissato sistema di riferimento affine.
1. Determinare un' affinità
$$f : A^2(\mathbb{R}) \longrightarrow A^2(\mathbb{R})$$
tale che
$$f(r) = (r'), \quad f(s) = s', \quad f(t) = (t')$$
dove
$$r : x = 1; \quad s : x = y; \quad t : y = -2$$
$$r' : 2x - y = 0; \quad s' : x = -y; \quad t' : 2x + y = 1$$
2. Discutere l'unicità di f.
3. Vero o Falso: un'affinità $f : A^2(\mathbb{R}) \to A^2(\mathbb{R})$ trasforma un parallelogramma in un parallelogramma.
Se vero, dimostrarlo; se falso, dare un esplicito controesempio.
4. Vero o Falso: un'affinità $f : A^2(\mathbb{R}) \to A^2(\mathbb{R})$ trasforma un trapezio in un trapezio.
Se vero, dimostrarlo; se falso, dare un esplicito controesempio.

Soluzione:

Risposta: