Geometria I

Prof. P. Piccinni, Canale M-Z

Risposte della prova scritta del 19 Luglio 2018

Esercizio 1. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

1. Stabilire se A è simmetrica, se è hermitiana e se è unitaria.
2. Stabilire se esiste una matrice $B \in GL(2, \mathbb{C})$ tale che $B^{-1}AB$ sia diagonale e in caso affermativo determinare una tale B.
3. Stabilire se esiste una matrice $C \in GL(2, \mathbb{C})$ tale che $C^t AC$ sia diagonale e in caso affermativo determinare una tale C.
4. Stabilire se la conica $\mathcal{C}$ di $A^2(\mathbb{C})$ di equazione

$$ix^2 + 2xy - iy^2 + 1 = 0$$

è generale o degenere e nel secondo caso scrivere le equazioni delle rette componenti.

Risposte:

A simmetrica: $\boxed{\text{sì}}$ A hermitiana: $\boxed{\text{no}}$ A unitaria: $\boxed{\text{no}}$ Matrice B: $\boxed{\text{non esiste}}$ Matrice C: $\boxed{C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}$

$\mathcal{C}$ generale o degenere: $\boxed{\text{non degenere}}$ Eventuali rette componenti di $\mathcal{C}$: $\boxed{ix + y + \sqrt{-i},\ ix + y - \sqrt{-i}}$

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico $<\, ,\, >$. Sia $P \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ l'operatore L_A con

$$A := \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \tag{1}$$

1. Verificare che P è un operatore di proiezione ortogonale su un sottospazio W. Determinare equazioni cartesiane per W e per $W^\perp$.
Sia $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$b(\underline{v}, \underline{u}) :=< P\underline{u}, \underline{v} >$$

2. Verificare che b è una forma bilineare simmetrica.
3. Determinare la segnatura di b e una base di Sylvester per b.
4. Sia U il piano di equazioni cartesiane $x_1 - x_3 = 0\,,\quad x_2 - x_4 = 0\,$. Sia $b' : U \times U \to \mathbb{R}$ la restrizione di b a U: determinare gli indici di nullità, positività e negatività di b'.

Risposte:

$\boxed{W : x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - x_4 = 0,\ \ W^\perp . x_1 - x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0, \qquad (p, q, \nu) = (2, 0, 2)}$

$\boxed{\text{base di Sylvester : } \vec{u}_1 = (\sqrt{2}, 0, 0, 0),\ \vec{u}_2 = (0, 0, \sqrt{2}, 0),\ \vec{u}_3 = (1, 1, -1, 1),\ \vec{u}_4 = (1, 1, 0, 0)}$

$\boxed{\text{segni di } b' : (p, q, \nu) = (2, 0, 0)}$

Esercizio 3. Si consideri nello spazio proiettivo reale $P^3(\mathbb{R})$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, i cinque punti

$$A = [1, 0, 1, 0]\,,\quad B = [3, -1, 1, 0]\,,\quad C = [0, 1, 1, 1]\,,\quad D = [3, 2, 4, 3] \quad E = [1, 1, 1, 0]\,.$$

1. Verificare che tre fra i punti A, B, C, D, E sono allineati e scrivere le equazioni cartesiane della retta r che li contiene.

2. Stabilire se esiste un piano π che contenga A, B, C, D, E.
3. Si considerino poi i piani

$$\alpha : x_0 + x_2 = 0,\ \beta : 3x_0 - x_1 + x_2 = 0,\ \gamma : x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ \delta : 3x_0 + 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0,\ \epsilon : x_0 + x_1 + x_2 = 0.$$

Utilizzando il principio di dualità, si può affermare che tre fra i piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ contengono la stessa retta? Perché?

Risposte:

I tre punti allineati: $\boxed{B, C, D}$ Equazioni r: $\boxed{2x_0 + 3x_1 - 3x_2 = 0,\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0}$ Esiste π?: $\boxed{\text{no}}$
Quesito 3: $\boxed{\text{sì}}$

Esercizio 4. Piano affine $A^2(\mathbb{R})$ con coordinate x, y rispetto ad un fissato sistema di riferimento affine.
1. Determinare un' affinità

$$f : A^2(\mathbb{R}) \longrightarrow A^2(\mathbb{R})$$

tale che

$$f(r) = (r'),\quad f(s) = s',\quad f(t) = (t')$$

dove

$$r : x = 1;\quad s : x = y;\quad t : y = -2$$

$$r' : 2x - y = 0;\quad s' : x = -y;\quad t' : 2x + y = 1$$

2. Discutere l'unicità di f.
3. Vero o Falso: un'affinità $f : A^2(\mathbb{R}) \to A^2(\mathbb{R})$ trasforma un parallelogramma in un parallelogramma.
Se vero, dimostrarlo; se falso, dare un esplicito controesempio.
4. Vero o Falso: un'affinità $f : A^2(\mathbb{R}) \to A^2(\mathbb{R})$ trasforma un trapezio in un trapezio.
Se vero, dimostrarlo; se falso, dare un esplicito controesempio.

Risposte:

$$\boxed{\text{affinità (unica)} : x' = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{12}y + \frac{1}{3},\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}}$$

$\boxed{\text{Quesiti 3 e 4: entrambi veri}}$