Geometria 1

Proff. Paolo Piazza - Paolo Piccinni

Prova scritta del 21.01.2019.

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	7	
3	8	
4	7	
Totale	30	

ATTENZIONE:
- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- SCRIVETE LE RISPOSTE NEGLI APPOSITI RIQUADRI
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI (SMARTPHONES, TABLETS, TELEFONINI ETC ...) DEVONO ESSERE **SPENTI** E IN BORSA
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI.

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}_2[X]$ con base standard $\{1, X, X^2\}$ fissata. Consideriamo l'applicazione bilineare simmetrica

$$< p, q >:= p(0)q(0) + p(1)q(-1) + p(-1)q(1) + 3p'(0)q'(0)$$

dove p' denota la derivata.
1. Verificare che $<\,,\,>$ è definita positiva e definisce quindi un prodotto scalare.
2. Sia $T : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'operatore lineare definito da $T(p)(t) = p(t + 1)$.
Stabilire se T è simmetrico rispetto al prodotto scalare considerato.
Stabilire se T è unitario rispetto al prodotto scalare considerato.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{C}^3$ con il prodotto hermitiano canonico. Consideriamo gli operatori lineari $L_j := L_{A_j} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $j \in \{1,2,3\}$, definiti dalle seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{vmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{vmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{vmatrix}$$

1. Stabilire quali fra questi operatori sono hermitiani.
2. Stabilire quali fra questi operatori sono unitari.
3. Stabilire quali fra questi operatori sono diagonalizzabili.
4. Vero o Falso: esistono matrici invertibili M_1, M_2 e M_3 tali che

$$M_1 A_1 (M_1)^{-1} = M_2 A_2 (M_2)^{-1} = M_3 A_3 (M_3)^{-1}.$$

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 3. Si considerino nel piano affine complesso, con coordinate omogenee (x, y) la curva algebrica

$$\mathcal{C} : f(x,y) = x^4 - x^2y^3 - x^2y^2 + y^5 - 2x^3 + 2xy^3 + 2x^2y - 2y^4 = 0.$$

i) Si determini la molteplicità per $\mathcal{C}$ dei punti $O = (0,0)$ e $A = (1,1)$, e scrivere in essi l'equazione della retta tangente (se i punti sono semplici) o delle tangenti principali (se i punti sono singolari).

ii) Dalla risposta la punto i) si può dedurre che $\mathcal{C}$ è riducibile? (motivare la risposta).

iii) Determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$, precisando se essi sono semplici o singolari.

Soluzione:

Risposta:

Esercizio 4. Si considerino nel piano proiettivo $\mathbb{R}P^2$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, i punti

$$P_0 = [1, 0, 0], \quad P_1 = [0, 1, 0], \quad P_2 = [0, 0, 1], \quad P_3 = [1, 1, 1],$$

e

$$P'_0 = P_0 = [1, 0, 0], \quad P'_1 = [1, -1, 0], \quad P'_2 = [2, -1, 1], \quad P'_3 = P_2 = [0, 0, 1].$$

i) Verificare che le quaterne (P_0, P_1, P_2, P_3) e (P'_0, P'_1, P'_2, P'_3) sono in posizione generale, ovvero che i loro punti sono a tre a tre linearmente indipendenti.

ii) Scrivere le equazioni $[x_0, x_1, x_2] \to [x'_0, x'_1, x'_2]$ della proiettività $\mathcal{P}$ che manda P_0, P_1, P_2, P_3 ordinatamente in P'_0, P'_1, P'_2, P'_3.

iii) Determinare, se esistono, una o più rette $r, r', \ldots$ in $\mathbb{R}P^2$ tali che $\mathcal{P}(r) = r,\ \mathcal{P}(r') = r', \ldots$ scrivendone l'equazione cartesiana.

Soluzione:

Risposta: