Geometria I. Proff. P. Piazza e P. Piccinni a.a. 2017-18.

Esercitazione pomeridiana del 14 Marzo 2018

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^4$ con prodotto scalare canonico

$$< \underline{x}, \underline{y} >:= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

Determinare una base ortonormale del sottospazio U di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Determinare equazioni cartesiane per $U^\perp$. (Sappiamo che $U^\perp$ ha dimensione 2; avete quindi bisogno di 4-2=2 equazioni lineari indipendenti....)

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}_2[X]$ e consideriamo $< , >: V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$< p, q >= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1).$$

2.1. Verificare che trattasi di un prodotto scalare.
2.2. Consideriamo i tre vettori $p_0 = -1 + X^2$, $p_1 = -1 + X$, $p_2 = X^2$. Verificare che $\{p_0, p_1, p_2\}$ è una base di V.
2.3. Applicare il procedimento di Gram-Schmidt alla base $\{p_0, p_1, p_2\}$ determinando una base ortonormale $\{q_0, q_1, q_2\}$.

Esercizio 3. Sia $V^{n^2} = M_n(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n ad elementi reali.
3.1. Dimostrare che la funzione

$$f : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$
$$f(A, B) = tr(A\ B^t)$$

definisce un prodotto scalare su V^{n^2} (forma bilineare simmetrica definita positiva).
3.2. Indicare una base di $M_n(\mathbb{R})$ che sia ortonormale rispetto a f.
3.3. A quale prodotto scalare in $\mathbb{R}^{n^2}$ corrisponde f nell'isomorfismo $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$?

[Suggerimento per tutto l'esercizio: esaminare prima il caso $n = 2$].