Geometria I. Proff. P. Piazza e P. Piccinni a.a. 2017-18.

Tutoraggio del 2 Maggio 2018

Esercizio 1.
Sia $\mathbf{A}$ un piano affine e siano A, B, C tre suoi punti non allineati. È definito allora T_{ABC}, il triangolo di vertici A, B, C:

$$T_{ABC} = \{P \in \mathbf{A} \mid \exists t \geq 0, u \geq 0, t + u \leq 1 \text{ tali che } \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC}\}.$$

Fate una figura.
Sia $f \in \mathrm{Aff}(\mathbf{A})$. Dimostrare che è ben definito il triangolo $T_{f(A)f(B)f(C)}$ e che $f(T_{ABC}) \subset T_{f(A)f(B)f(C)}$.
Utilizzando f^{-1} dimostrate che si ha $f(T_{ABC}) = T_{f(A)f(B)f(C)}$.

Esercizio 2.
1. Consideriamo lo spazio euclideo numerico E^2 e l'affinità $T_{A,\underline{c}}$, $T_{A,\underline{c}}(\underline{x}) := A\underline{x} + \underline{c}$, con

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{c} = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

Verificare che $T_{A,\underline{c}} = T_1 \circ T_2 \circ T_3$ con T_1 una traslazione, T_2 un'omotetia e T_3 un'isometria che lascia fissa l'origine.
2. Sappiamo dall'esercizio precedente che un'affinità trasforma triangoli in triangoli.
Vero o Falso (*argomentate in dettaglio le vostre risposte*):
(a). $T_{A,\underline{c}}$ trasforma triangoli rettangoli in triangoli rettangoli
(b). $T_{A,\underline{c}}$ trasforma triangoli isosceli in triangoli isosceli
(e). $T_{A,\underline{c}}$ è un'isometria

Esercizio 3.
Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine e siano Q_1 e Q_2 due suoi punti distinti. I punti del segmento Q_1Q_2 sono, per definizione, i punti $Q(s)$, $s \in [0, 1]$, univocamente determinati dalla relazione: $\overrightarrow{Q_1Q(s)} = s\overrightarrow{Q_1Q_2}$. Fate una figura.
Un sottoinsieme C di $\mathbf{A}$ è convesso se contenendo due punti contiene tutto il segmento che li congiunge. Dimostrare che se $C \subset \mathbf{A}$ è un insieme convesso e $f \in \mathrm{Aff}(\mathbf{A})$ allora $f(C) \subset \mathbf{A}$ è anche convesso.

Esercizio 4. Piano affine reale $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ con coordinate affini (x, y). Si considerino i seguenti quadrilateri:

$$\mathcal{Q} = \{|x| \leq 1,\ \ |y| \leq 1\}, \qquad \mathcal{Q}' = \{|y - 2x| \leq 2,\ \ |y + 2x| \leq 2\}, \qquad \mathcal{Q}'' = \{|y| \leq 1,\ \ y + 2|x| \leq 3\}.$$

(i) Si trovino i vertici $P, Q, R, S; P', Q', R', S'; P'', Q'', R'', S''$ rispettivamente di $\mathcal{Q}; \mathcal{Q}'; \mathcal{Q}''$.
(Nota: per semplicità, si chiamino P, P', P'' i vertici nel primo quadrante, Q, Q', Q'' quelli nel secondo, R, R', R'' quelli nel terzo, S, S', S'' quelli del quarto).
(ii) Si determini (se esiste) un'affinità f che porta $\mathcal{Q}$ in $\mathcal{Q}'$.
(iii) Si determini (se esiste) un'affinità g che porta $\mathcal{Q}$ in $\mathcal{Q}''$.