Geometria I. Proff. P. Piazza e P. Piccinni a.a. 2017-18.

Tutoraggio del 16 Maggio 2018

Esercizio 1. Spazio proiettivo reale $P^3_{\mathbf{R}}$ - Coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} x_0 + x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} x_0 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}, \quad r_3 : \begin{cases} x_0 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}.$$

i) Verificare che r_1, r_2, r_3 sono a due a due incidenti, e determinare le coordinate omogenee dei punti $A = r_1 \cap r_2$, $B = r_1 \cap r_3$, $C = r_2 \cap r_3$.

ii) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente A, B, C.

iii) Siano α, β, γ i piani di $P^3_{\mathbf{R}}$ che hanno per coefficienti della loro equazione cartesiana le coordinate proiettive omogenne rispettivamente di A, B, C. Determinare le coordinate del punto $P = \alpha \cap \beta \cap \gamma$.

iv) Interpretare in termini della dualità in $P^3_{\mathbf{R}}$ la coincidenza tra le coordinate omogenee di P e i coefficienti dell'equazione cartesiana di π.

Soluzione.

i) Le soluzioni non nulle dei tre sistemi lineari omogenei di quattro equazioni in quattro incognite

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} x_0 + x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}, \quad r_1 \cap r_3 : \begin{cases} x_0 + x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}, \quad r_2 \cap r_3 : \begin{cases} x_0 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_0 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}.$$

forniscono le coordinate omogenee dei tre punti A, B, C di intersezione. Si ottiene (a meno di fattori di proporzionalità non nulli) $A[1, -1, -1, 1], B[1, -1, 1, -1], C[1, 1, -1, -1]$.

ii) Il piano π consiste dei punti $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ di $P^2_{\mathbf{R}}$ che sono linearmente dipendenti con A, B, C. La sua equazione è quindi:

$$det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 0,$$

ovvero $\pi : x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

iii) Dalla definizione dei tre piani α, β, γ si ha subito:

$$\alpha : x_0 - x_1 - x_2 + x_3 = 0, \qquad \beta : x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0 \qquad \gamma : x_0 + x_1 - x_2 - x_3 = 0.$$

Le coordinate omogenee di $P = \alpha \cap \beta \cap \gamma$ sono le soluzioni non nulle del sistema lineare omogeneo formato dalle precedenti tre equazioni, p. es. i minori a segni alterni della sua matrice dei coefficienti. Dunque (a meno di un fattore di proporzionalità) $P[1, 1, 1, 1]$.

iv) I piani α, β, γ di $P^3_{\mathbf{R}}$ possono essere identificati con i punti A', B', C' dello spazio proiettivo duale che hanno per coordinate omogenee i coefficienti delle equazioni rispettivamente di α, β, γ. Dunque

$$A'[1, -1, -1, 1], B'[1, -1, 1, -1], C'[1, 1, -1, -1],$$

ovvero A', B', C' hanno le stesse coordinate rispettivamente dei punti A, B, C. Nella dualità il piano generato dai tre punti A', B', C' (che per quanto visto al punto ii ha nelle coordinate dello spazio duale la stessa equazione del piano π) corrisponde dunque al punto $P = \alpha \cap \beta \cap \gamma$. Ciò dà ragione del fatto che le coordinate omogenee di P coincidono con i coefficienti dell'equazione cartesiana di π.

Esercizio 2. Spazio proiettivo reale $P^3_{\mathbf{R}}$ - Coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Siano π il piano di equazione: $x_0 + x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$, r la retta di equazioni cartesiane

$$2x_0 - x_1 - x_2 + x_3 = 0 = x_0 + 2x_1 - x_2 - x_3$$

e s la retta di equazioni parametriche $x_0 = t + u,\ x_1 = 2t - u,\ x_2 = -t,\ x_3 = u$.
1. Verificare che le due rette sono sghembe e che il piano π non contiene nessuna delle due rette.
2. Fra le seguenti coppie di sottospazi: r e s, π e r, π e s, quali sono in posizione generale ?
3. Trovare equazioni parametriche della retta r' che interseca sia r che s ed è contenuta in π.

L'esercizio assegnato qui sopra è un caso particolare del seguente enunciato:
Siano r e s due rette sghembe e π un piano che non contiene nessuna delle due rette; allora esiste un' unica retta r' che interseca sia r che s ed è contenuta in π.
4. Determinare il duale del precedente enunciato.

Soluzione.
1. È subito visto che s ha equazioni cartesiane:

$$x_0 + x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

r ed s hanno intersezione non vuota se e solo se il sistema 4×4 omogeneo formato dalle loro equazioni cartesiane ha soluzioni non-banali. Ma la matrice dei coefficienti di questo sistema ha determinante diverso da zero: ne segue che le due rette sono sghembe.
Per studiare la mutua posizione di π e r e π e s andiamo ad esaminare i due sistemi 3×4 che si ottengono mettendo a sistema l'equazione di π con le equazioni cartesiane di r e l'equazione di π con le equazioni cartesiane di s. È elementare verificare che le matrici dei coefficienti di questi due sistemi hanno entrambi rango 3 e da ciò segue facilmente che r non è contenuta in π e analogamente per s; infatti, se r fosse contenuta in π allora π ed i due piani che definiscono r apparterrebbero allo stesso fascio e quindi il rango della matrice dei coefficienti delle equazioni dei tre piani sarebbe uguale a due, il che non è.
2. Tutte e tre le coppie sono in posizione generale.
3. Sia $P_0 := r \cap \pi$ e sia $P_1 := s \cap \pi$. Questi due punti si trovano risolvendo i due sistemi di cui in **1**: si trova $P_0 = [7, 3, 12, 1]$ e $P_1 = [1, -4, 1, 2]$. La retta cercata è la retta per questi due punti: essa ha equazioni parametriche

$$x_0 = 7t + u\,, \quad x_1 = 3t - 4u\,, \quad x_2 = 12t + u\,, \quad x_3 = t + 2u\,.$$

4. La proposizione data è
Date due rette r, s con $r \cap s = \emptyset$ e π un piano che non contiene r e non contiene s, allora $\exists$ un'unica retta r' tale che $r \cap r' \neq \emptyset$, $s \cap r' \neq \emptyset$ e $r' \subset \pi$
La proposizione duale è:
Date due rette r, s con $r \cup s = P^3(\mathbb{R})$ e P un punto non contenuto in r e non contenuto in s, allora $\exists$ un'unica retta r' tale che $r \cup r' \neq P^3(\mathbb{R})$, $s \cup r' \neq P^3(\mathbb{R})$ e che contiene P.
Ovviamente $r \cup s := L(r, s)$, lo spazio congiungente r ed s.