Geometria I. Proff. P. Piazza e P. Piccinni a.a. 2017-18.

Tutoraggio del 30 Maggio 2018

Esercizio 1. Piano proiettivo reale numerico $P^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2. È data la conica proiettiva $\mathcal{C}$ di equazione

$$3X_0^2 - 10X_0X_2 + 2X_1^2 + 3X_2^2 = 0$$

1. Scrivere la matrice A associata a $\mathcal{C}$ e dedurne il tipo proiettivo di $\mathcal{C}$ scrivendo anche l'equazione canonica proiettiva reale.
2. Siano $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ le coniche affini ottenute disomogeinizzando rispetto a X_0, X_1, X_2 rispettivamente. Determinare il tipo affine di ognuna delle tre coniche $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$.

Soluzione.
1. La matrice associata a questa conica proiettiva è :

$$A := \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

calcolando il polinomio caratteristico di A ed applicando il criterio di Cartesio ed il teorema di Sylvester otteniamo che A è congruente alla matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Ne segue che la conica è proiettivamente equivalente alla conica di equazione canonica $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$.
2. $\mathcal{C}_0$ ha equazione $3-10Y+2X^2+3Y^2 = 0$ nel piano affine $P^2(\mathbb{R})\setminus H_0$. $\mathcal{C}_1$ ha equazione $2-10YX+3X^2+3Y^2 = 0$ nel piano affine $P^2(\mathbb{R}) \setminus H_1$. $\mathcal{C}_2$ ha equazione $3 - 10X + 2Y^2 + 3X^2 = 0$ nel piano affine $P^2(\mathbb{R}) \setminus H_2$. Calcolando gli invarianti affini si dimostra che $\mathcal{C}_0$ è un'ellisse, $\mathcal{C}_1$ è un'iperbole e $\mathcal{C}_2$ è un'ellisse.

Esercizio 2. Piano euclideo E^2 con coordinate x, y rispetto ad un fissato sistema di riferimento cartesiano $O\underline{i}\underline{j}$. Si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione $f(X,Y) = 3X^2 + 2XY + 3Y^2 + 2\sqrt{2}X = 0$.
1. Determinare il tipo affine reale di $\mathcal{C}$.
2. Determinare un' isometria ψ di E^2 ed una conica canonica metrica $\mathcal{D}$ in modo tale che $\mathcal{C} = \psi(\mathcal{D})$. Disegnare il supporto della conica $\mathcal{C}$.
3. Sia S il supporto della conica. Determinare esplicitamente un'isometria $T : E^2 \to E^2$, $T \neq \mathrm{Id}$, tale che $T(S) = S$. Vero o Falso: esistono tre isometrie con questa proprietà.
4. Determinare un riferimento cartesiano $O'\underline{i}'\underline{j}'$ con coordinate associate x', y' nel quale la conica $\mathcal{C}$ si scrive con l'equazione canonica metrica. Fate un disegno di $\mathcal{C}$ e dei due riferimenti.

Soluzione.
1. La matrice associata alla conica è la matrice

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Tale matrice ha determinante diverso da zero, quindi $\mathcal{C}$ è non degenere. La sottomatrice dei termini quadratici è

$$A_0 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

che ha determinante positivo. Trattasi quindi di un'ellisse non-degenere. Infine: dal polinomio caratteristico di A e dal criterio di Cartesio scopriamo che la segnatura di A è $(2, 1)$ e quindi la conica è un'ellisse reale. (In alternativa è facile vedere che il supporto di $\mathcal{C}$ è non-vuoto; ad esempio $(0, 0)$ è un elemento del supporto.)

2. Per determinare $\mathcal{D}$ e l'isometria ψ procediamo come nella dimostrazione del teorema di classificazione. Diagonalizziamo innanzitutto la forma quadratica definita dai termini di grado di 2 di f. La matrice associata a questa forma quadratica è la matrice A_0, che è simmetrica. Applichiamo il teorema spettrale. A_0 ha autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 4$ con autovettori ortonormali dati da

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

Sia M la matrice che ha come colonne le coordinate di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$:

$$M := \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

M è un elemento di $SO(2)$. Se (X', Y') sono le coordinate associate alla base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ allora sappiamo che

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = M \begin{vmatrix} X' \\ Y' \end{vmatrix} \tag{1}$$

Sostituiamo alle variabili polinomiali X ed Y nel polinomio f l' espressione in termini di X' e Y' data da (1) ed otteniamo

$$g(X', Y') := f(M \begin{vmatrix} X' \\ Y' \end{vmatrix}).$$

Facendo i facili conti scopriamo che

$$g(X', Y') = 2(X')^2 + 4(Y')^2 + 2X' + 2Y'$$

che è proporzionale al polinomio

$$h(X', Y') = (X')^2 + 2(Y')^2 + X' + Y'$$

Consideriamo ora la traslazione definita da

$$\begin{vmatrix} X' \\ Y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X'' - 1/2 \\ Y'' - 1/4 \end{vmatrix}$$

dove

$$\frac{1}{2} = \frac{a_{01}}{a_{11}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{4} = \frac{a_{02}}{a_{22}}$$

e dove gli a_{ij} si riferiscono ai coefficienti in h. Osserviamo che le due trasformazioni considerate danno, insieme, la trasformazione

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = M \begin{vmatrix} X'' - 1/2 \\ Y'' - 1/4 \end{vmatrix}$$

che riscriviamo, facendo il facile conto, come

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = M \begin{vmatrix} X'' \\ Y'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{8} \\ \frac{\sqrt{2}}{8} \end{vmatrix} \tag{2}$$

Sostituendo al posto di X', Y' la loro espressione in termini di X'', Y'' otteniamo il polinomio

$$\ell(X'', Y'') = h(\begin{vmatrix} X'' - 1/2 \\ Y'' - 1/4 \end{vmatrix})$$

che è dato esplicitamente da

$$\ell(X'', Y'') = (X'')^2 + 2(Y'')^2 - \frac{3}{8} \equiv \frac{(X'')^2}{(\sqrt{\frac{3}{8}})^2} + \frac{(Y'')^2}{(\frac{\sqrt{3}}{4})^2} - 1.$$

Sia $\mathcal{D}$ la conica euclidea di equazione canonica

$$\frac{X^2}{(\sqrt{\frac{3}{8}})^2} + \frac{Y^2}{(\frac{\sqrt{3}}{4})^2} - 1 = 0.$$

Notiamo che $3/8 > 3/16$, quindi $\mathcal{D}$ è effettivamente in forma canonica. $\mathcal{D}$ è un'ellisse reale (già lo sappiamo). Sia $\psi : E^2 \to E^2$ l'isometria

$$\psi(\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix}) = M \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{8} \\ \frac{\sqrt{2}}{8} \end{vmatrix}, \qquad M = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

Allora, dalle precedenti considerazioni, abbiamo che $\mathcal{C} = \psi(\mathcal{D})$. Per disegnare la conica $\mathcal{C}$ osserviamo che $\mathcal{C}$ incontra l'asse X nei punti $(0,0)$ e $(-2\sqrt{2}/3, 0)$, mentre incontra l'asse Y solo nell'origine. Il centro di $\mathcal{C}$ è il punto $\psi(0,0)$ e cioè il punto $(-\frac{3\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{8})$. Il semiasse maggiore misura $2\sqrt{\frac{3}{8}}$ e giace sulla retta ottenuta trasformando l'asse X; i punti dell'asse X sono i punti $(t, 0)$ che, trasformati, danno i punti $(t/\sqrt{2}, -t/\sqrt{2}) + (-\frac{3\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{8})$. Quindi il semiasse maggiore di $\mathcal{C}$ giace sulla retta, chiamiamola r_M, per il centro e di parametri direttori $(1, -1)$. Conseguentemente abbiamo che il semiasse minore, di lunghezza $\sqrt{3}/2$, giace sulla retta, r_m, per il centro di parametri direttori $(1, 1)$. È ora facile disegnare la conica $\mathcal{C}$.

3. La simmetria rispetto al centro è una isometria che trasforma il supporto dell'ellisse reale in se stesso. La simmetria σ rispetto ad un punto di coordinate (x_0, y_0) ha equazioni $\sigma(X, Y) = (2x_0 - X, 2y_0 - Y)$ e basterà quindi sostituire in questa espressione generale le coordinate del centro di $\mathcal{C}$. Abbiamo due ulteriori isometrie che trasformano il supporto di $\mathcal{C}$ in se stesso: la simmetria (ortogonale) rispetto alla retta r_M e la simmetria (ortogonale) rispetto alla retta r_m.