Geometria I. a.a. 2017-18.

Foglio di Esercizi n.1.
Consegna il 14/3/2018 in Aula IV e in Aula V, ore 14.

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}_n[X]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado $\leq n$. È ben noto che $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ è una base di V.
Sia $t \in \mathbb{R}$ e sia $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$.
Consideriamo $P \in V$ e riguardiamolo come una funzione infinitamente derivabile su $\mathbb{R}$. Possiamo considerare la valutazione in t, $P(t)$, e, più in generale, $\frac{d^k P}{dx^k}(t)$.
(a) Verificare che le applicazioni $V \to \mathbb{R}$ definite da

$$P \to P(t) \qquad \text{e} \qquad P \to \frac{d^k P}{dx^k}(t)$$

definiscono per ogni fissato t elementi dello spazio duale di V.
(b) Utilizzando questi funzionali per $t = 0$ costruire la base duale di $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

Esercizio 2. Sia $V^{n^2} = M_n(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n ad elementi reali. Stabilire quali delle seguenti applicazioni risulta essere un funzionale lineare (dunque elemento del duale di $V = V^{n^2}$), e in tali casi determinare l'equazione dell'iperpiano suo nucleo:
a) la funzione traccia tr : $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,
b) la funzione determinante det: $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,
c) la funzione somma di tutti gli elementi della matrice: $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ fissata. Coordinate associate (x_1, x_2, x_3, x_4).
Sia $b(\, , \,)$ la forma bilineare definita in coordinate da

$$b(\underline{v}, \underline{u}) = u_1 v_1 - u_2 v_2 + u_3 v_4 + u_4 v_3$$

(a) Verificare che b è simmetrica.

(b) Scrivere la matrice $A = A_b^{\mathcal{E}}$ associata a b nella base $\mathcal{E}$.

(c) Verificare che b ha rango 4.

(d) Utilizzando il concetto di vettore non-isotropo e di b-ortogonale ad un vettore non-isotropo, costruite una base $\mathcal{K} = \{\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3, \underline{k}_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi $b(\, , \,)$.
(Suggerimento: cominciate con il fissare un vettore non-isotropo $\underline{k}_1$; determinate poi

$$\underline{k}_1^{\perp} \equiv (\mathbb{R}\underline{k}_1)^{\perp} := \{\underline{v} \in \mathbb{R}^4 \;\; | \;\; b(\underline{v}, \underline{k}_1) = 0\}$$

Come dovete scegliere $\underline{k}_2$? .....)

(e) Determinare indice di positività e negatività di b ed una base $\mathcal{F}$ tale che $A_b^{\mathcal{F}}$ sia nella forma di Sylvester.