Geometria I. a.a. 2017-18.
Proff. Paolo Piazza e Paolo Piccinni

Foglio di Esercizi n.2.
Consegna il 28/3/2018 in Aula IV e in Aula V, ore 14.

Esercizio 1. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ fissata e prodotto scalare canonico $<\,,\,>$.
Sia $b(\,,\,)$ la forma bilineare simmetrica definita in coordinate da

$$b(\underline{v}, \underline{u}) = u_1 v_1 - u_2 v_2 + u_3 v_4 + u_4 v_3$$

Abbiamo incontrato questa forma bilineare nel Foglio n. 1.

1.1. Si consideri la matrice A associata a b nella base $\mathcal{E}$ e l'operatore $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito da A.
Trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori per T.

1.2. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi b. È possibile dedurre dal segno degli autovalori non nulli di T la forma di Sylvester di b ?

Esercizio 2. Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale euclideo. Sia T un endomorfismo. Fissiamo una base $\mathcal{B}$. Sia A la matrice associata a T in questa base, $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$, e sia S la matrice associata a $<\,,\,>$ in questa base. Completare la seguente Proposizione e dimostrarla:
Proposizione. T è un operatore simmetrico se e solo se per le matrici A ed S vale la relazione......

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^2$ e sia $S = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

3.1 Verificare che l'applicazione $<\,,\,>: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $< \underline{x}, \underline{y} > = \underline{x}^T S \underline{y}$ è un prodotto scalare.

3.2 Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'operatore L_A con $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$. Stabilire se T è simmetrico rispetto al prodotto scalare definito in **3.1**.

Esercizio 4. Consideriamo $V = \mathbb{C}^2$ e sia

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{vmatrix}.$$

Consideriamo

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x}^T A \overline{\mathbf{y}}\,.$$

Stabilire se $h(\,,\,)$ è una forma hermitiana. Stabilire se $h(\,,\,)$ è un prodotto scalare hermitiano.