Geometria I. a.a. 2017-18.
Proff. Paolo Piazza e Paolo Piccinni

Foglio di Esercizi n.3.
Consegna il giorno 11/4/2018 in Aula IV e in Aula V, ore 14.

Esercizio 1. Sia $(V, <\,,\,>)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n e sia U un suo sottospazio di dimensione k. Vale la decomposizione $V = U \oplus U^{\perp}$. Sia $\underline{v} \in V$ e sia $\underline{v} = \underline{u} + \underline{u}^{\perp}$ la sua decomposizione secondo $V = U \oplus U^{\perp}$.
(1.1) Verificare che la legge

$$V \ni \underline{v} \to \underline{u} \in V$$

definisce un operatore **lineare** $P_U : V \to V$, detto *proiezione ortogonale su* U. Per definizione $P_U(\underline{v}) = \underline{u}$.
Verificare che la legge

$$V \ni \underline{v} \to \underline{u} - \underline{u}^{\perp} \in V$$

definisce un operatore lineare $S_U : V \to V$ detto *simmetria ortogonale rispetto a* U. Quindi, per definizione, $S_U(\underline{v}) = u - u^{\perp}$.
Analogamente abbiamo

$$P_{U^{\perp}}(\underline{v}) := u^{\perp}\,, \quad S_{U^{\perp}}(\underline{v}) = -\underline{u} + \underline{u}^{\perp}\,,$$

la proiezione ortogonale su $U^{\perp}$ e la simmetria ortogonale rispetto a $U^{\perp}$
Considerate $V = \mathbb{R}^2$, U uguale all'asse x; $\underline{v}$ un vettore di coordinate strettamente positive; su un disegno indicate $P_U(\underline{v})$, $P_{U^{\perp}}(\underline{v})$, $S_U(\underline{v})$, $S_{U^{\perp}}(\underline{v})$.
(1.2) Sia $\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k\}$ una base ortonormale di U; verificare che

$$P_U(\underline{v}) = \sum_{j=1}^{k} < \underline{v}, \underline{u}_j > \underline{u}_j.$$

(1.3) Verificare che in $\mathrm{End}(V)$ sussistono le seguenti identità

$$P_U + P_{U^{\perp}} = \mathrm{Id}_V\,, \quad (P_U)^2 = P_U\,, \quad (P_{U^{\perp}})^2 = P_{U^{\perp}} \tag{0.1}$$

dove $T^2 := T \circ T$ per un operatore $T \in \mathrm{End}(V)$ e dove Id_V denota l'operatore identità: $\mathrm{Id}_V(\underline{v}) = \underline{v}$. Verificate anche che

$$S_U = \mathrm{Id}_V - 2P_{U^{\perp}}\,; \quad S_{U^{\perp}} = 2P_U^{\perp} - \mathrm{Id}_V \tag{0.2}$$

$$(S_U)^2 = \mathrm{Id}_V\,; \quad (S_{U^{\perp}})^2 = \mathrm{Id}_V \tag{0.3}$$

(1.4) Sia $V = \mathbb{R}^2$ con prodotto scalare canonico. Determinare la matrice associata nella base canonica all'operatore di simmetria ortogonale rispetto alla retta W di equazioni cartesiane $2x_1 - x_2 = 0$.
(1.5) Verificare che P_U e $P_{U^{\perp}}$ sono diagonalizzabili con autovalori 1 e 0 e che $V_{P_U}(0) = U^{\perp}$, $V_{P_U}(1) = U$; $V_{P_{U^{\perp}}}(0) = U$, $V_{P_{U^{\perp}}}(1) = U^{\perp}$.
Verificare che S_U e $S_{U^{\perp}}$ sono diagonalizzabili con autovalori 1 e -1 e che $V_{S_U}(1) = U$, $V_{S_U}(-1) = U^{\perp}$; $V_{S_{U^{\perp}}}(1) = U^{\perp}$, $V_{S_{U^{\perp}}}(-1) = U$.
(1.6) Verificare che P_U ed S_U (e quindi anche $P_{U^{\perp}}$ e $S_{U^{\perp}}$) sono operatori simmetrici.
(1.7) Verificare che S_U (e quindi $S_{U^{\perp}}$) è un operatore ortogonale.

Esercizio 2. Spazio affine, $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Si considerino i quattro punti:

$$P_1(-1,1,1), \quad P_2(4,1,0), \quad P_3(1,0,0), \quad P_4(-4,0,1).$$

i) Verificare che P_1, P_2, P_3, P_4 sono complanari e scrivere l'equazione del piano α da essi individuato.
ii) Verificare che P_1, P_2, P_3, P_4 sono vertici consecutivi di un parallelogramma contenuto in α [1]
iii) Scrivere le equazioni dei piani $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, contenenti le facce laterali della piramide di base il parallelogramma $P_1P_2P_3P_4$ e vertice nell'origine O.

[1] Per definizione un quadrilatero è un parallelogramma se ha i lati opposti paralleli (i lati opposti sono i lati non consecutivi).