

Esercizio 1.

Nello spazio euclideo E^3 con coordinate cartesiane (x, y, z) determinare equazioni cartesiane per il piano passante per il punto di coordinate $(-1, 0, 1)$ ed ortogonale alla retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2.

Siano A, B, C, D i punti di coordinate

$$A = (1, 2, 2), \quad B = (2, 1, 2), \quad C = (2, 2, 1), \quad D = (1, 1, 1).$$

- (i). Si verifichi che A, B, C non sono allineati e che A, B, C, D non sono complanari. Scrivere un'equazione cartesiana del piano α contenente A, B, C .
(ii). Calcolare la distanza tra α e D .

Esercizio 3.

Nello spazio euclideo E^3 con coordinate cartesiane (x, y, z) si consideri la retta s di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}.$$

Determinare i punti di s che distano $\sqrt{3}$ dall'origine.

Esercizio 4.

Consideriamo uno spazio euclideo E di dimensione 2 su uno spazio vettoriale euclideo (V, \langle, \rangle) con riferimento cartesiano Oe_1e_2 fissato e coordinate associate (x_1, x_2) . Sia r la retta di equazione cartesiana $3x_1 + 6x_2 + 5 = 0$. Sia O' il punto di coordinate $(-4, 1)$ e siano $\underline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2$, $\underline{f}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2$ vettori di V .

- (i). Verificare che $O'\underline{f}_1\underline{f}_2$ è un riferimento cartesiano di E . Siano (y_1, y_2) le coordinate associate a tale riferimento.
(ii) Determinare le formule di cambiamento di coordinate, dalle (x_1, x_2) alle (y_1, y_2) e viceversa.
(iii). Determinare l'equazione cartesiana della retta r nel riferimento $O'\underline{f}_1\underline{f}_2$.

Esercizio 5.

Nello spazio euclideo E^3 con coordinate cartesiane (x, y, z) sono date le rette

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Calcolare la distanza fra r ed s .

Esercizio 6.

Verificare che i punti $P_1(-1, 1, 2)$, $P_2(0, 1, 1)$, $P_3(1, 2, 0)$, $P_4(0, 2, 1)$ sono vertici consecutivi di un parallelogramma.

Calcolare l'area di tale parallelogramma (può essere utile la nozione di prodotto vettoriale...).

Calcolare l'area della proiezione ortogonale sul piano xy del parallelogramma $P_1P_2P_3P_4$.

Esercizio 7.

Sia \mathbf{A} uno spazio affine e siano Q_1 e Q_2 due suoi punti distinti. I punti del segmento Q_1Q_2 sono, per definizione, i punti $Q(s)$, $s \in [0, 1]$, univocamente determinati dalla relazione: $\overrightarrow{Q_1Q(s)} = s\overrightarrow{Q_1Q_2}$. Fate una figura.

Un sottoinsieme C di \mathbf{A} è convesso se contenendo due punti contiene tutto il segmento che li congiunge. Dimostrare che se $C \subset \mathbf{A}$ è un insieme convesso e $f \in \text{Aff}(\mathbf{A})$ allora $f(C) \subset \mathbf{A}$ è anche convesso.

Esercizio 8.

Consideriamo lo spazio affine numerico $A^2(\mathbb{R})$ con riferimento canonico affine fissato. Decidere se esiste un'affinità $f : A^2(\mathbb{R}) \rightarrow A^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(1, 1) = (0, 0), \quad f(-2, -2) = (1, -1), \quad f(1, -2) = (1/4, 1/2)$$

ed in caso affermativo determinarla.