**Geometria I. Proff. P. Piazza e P. Piccinni a.a. 2017-18.**

**Foglio 6 del 24 Maggio 2018**

**Esercizio 1.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con base canonica fissata consideriamo la forma bilineare simmetrica

$$b(\underline{x}, \underline{y}) := x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$$

i) Determinare il radicale di $b$.

ii) Verificare che il vettore $\underline{v} = (1, 1, 0)$ è non-isotropo. Determinare una base di Sylvester $\mathcal{F} = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3\}$ con la proprietà che $\underline{f}_1 = \underline{v}$. Determinare indici di positività e negatività di $b$.

iii) Sia $q$ la forma quadratica associata a $b$ e sia $\mathcal{C}$ la conica di $P^2(\mathbb{R})$, con coordinate omogenee $(x_1, x_2, x_3)$, definita dall'equazione $q(x_1, x_2, x_3) = 0$. Determinare una proiettività $f : P^2(\mathbb{R}) \to P^2(\mathbb{R})$ ed una conica proiettiva canonica $\mathcal{D}$ tali che $\mathcal{D} = f(\mathcal{C})$.

iv) Sia $H \subset P^2(\mathbb{R})$ la retta proiettiva di equazione $x_1 = 0$ e sia $\mathcal{C}'$ la conica affine $\mathcal{C}' := \mathcal{C} \cap (P^2(\mathbb{R}) \setminus H)$. Classificare affinemente $\mathcal{C}'$.

**Esercizio 2.** Si considerino, nel piano affine reale $A^2_{\mathbb{R}}$, con coordinate $(xy)$, le coniche:

$$\mathcal{D} : \ F(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0, \qquad \mathcal{E} : \ G(x, y) = xy - 1 = 0.$$

e il fascio di coniche

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu} : \lambda F + \mu G = 0.$$

i) Stabilire per quali valori di $\lambda, \mu$ la conica $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ è generale e per quali valori è degenere.

ii) Stabilire per quali valori di $\lambda, \mu$ la conica $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ è un'ellissi generale, per quali valori è un'iperbole generale e per quali è una parabola generale.

iii) Si determinino quindi le coordinate dei punti di intersezione $\mathcal{D} \cap \mathcal{E}$ e si disegnino le coniche $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ e le coniche degeneri del fascio di cui al punto i).

**Esercizio 3.** Si consideri nel piano affine, con coordinate cartesiane $(x, y)$ la conica

$$\mathcal{C} : f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y + 6 = 0.$$

i) Stabilire se $\mathcal{C}$ è generale o degenere e determinare il tipo affine di $\mathcal{C}$ come conica complessa e come conica reale.

ii) Determinare una conica affine canonica $\mathcal{D}$ ed un'affinità $\psi : A^2 \to A^2$ tale che $\mathcal{C} = \psi(\mathcal{D})$.

iii) Determinate un nuovo riferimento affine $O'\underline{i}'\underline{j}'$ in $A^2$ con la proprietà che $\mathcal{C}$ abbia nelle coordinate $x', y'$ del nuovo riferimento l'equazione canonica.

iv) $\mathcal{C}$ ammette punti reali? (motivare la risposta).

**Esercizio 4.** Nel piano affine numerico $A^2(\mathbb{R})$ determinare il tipo proiettivo e il tipo affine reale delle seguenti coniche:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 : &\quad x^2 + 6xy - 2y^2 + 2x - 4y + 2 = 0 \\
\mathcal{C}_2 : &\quad x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0 \\
\mathcal{C}_3 : &\quad 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 1 = 0
\end{aligned}$$

**Esercizio 5.** Nello spazio proiettivo numerico $P^3(\mathbb{R})$ si consideri la proiettività

$$f : P = [x_0, x_1, x_2, x_3] \longrightarrow f(P) = P' = [x'_0, x'_1, x'_2, x'_3]$$

definita dalle formule

$$\begin{aligned}
x'_0 &= \phantom{-} x_0 + x_1 - x_2 + x_3 \\
x'_1 &= \phantom{-} x_0 + x_1 + x_2 - x_3 \\
x'_2 &= - x_0 + x_1 + x_2 + x_3 \\
x'_3 &= \phantom{-} x_0 - x_1 + x_2 + x_3
\end{aligned}$$

i) Determinare i punti immagine $P'_0, P'_1, P'_2, P'_3, U'$ dei punti fondamentali $P_0 = [1, 0, 0, 0], P_1 = [0, 1, 0, 0], P_2 = [0, 0, 1, 0], P_3 = [0, 0, 0, 1]$ e del punto unità $U = [1, 1, 1, 1]$. Qualcuno di tali punti è fisso nella proiettività $f$?

ii) La proiettività $f$ ammette altri punti fissi? Come si può procedere per trovarli tutti?

[Suggerimento: Si scriva la matrice $A$ della proiettività $f$ , e si verifichi che il polinomio caratteristico di $A$ è $(\lambda-2)^3(\lambda+2)$. Trattandosi di matrice simmetrica, gli autospazi $V_1$, $V_{-1}$ dei due autovalori risp. $\lambda = 1, \lambda = -1$ hanno dimensione risp. 3 e 1. Tali autospazi hanno qualcosa a che fare con i punti fissi di $f$?]