Geometria I - Canale M-Z - Prof. P. Piccinni

Prima prova in itinere - 16 aprile 2018

Compito A

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Norme per le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito nome, cognome, e numero di matricola su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove non si possono consultare testi e appunti, né utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **2 ore e 30 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	10	
2	10	
3	10	
Totale	30	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30:

Esercizio 1. Si consideri la forma bilineare simmetrica

$$b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

definita per $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$ da

$$b(\vec{u}, \vec{v}) = -u_1 v_4 + u_2 v_3 + u_3 v_2 - u_4 v_1.$$

i) Scrivere la matrice B associata a b nella base canonica di $\mathbb{R}^4$, stabilire se la matrice B è ortogonale e se l'operatore lineare $L_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato a B è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

ii) Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ in cui b si scrive in forma di Sylvester.

iii) Scrivere le equazioni cartesiane di due sottospazi vettoriali V_1, V_2 di $\mathbb{R}^4$ su cui b è rispettivamente definita positiva e definita negativa.

Si consideri poi l'applicazione

$$h : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$$

definita per $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{C}^4$ da

$$h(\vec{u}, \vec{v}) = -u_1 \bar{v}_4 + i u_2 \bar{v}_3 - i u_3 \bar{v}_2 - u_4 \bar{v}_1.$$

iv) Verificare che h è hermitiana, ovvero che $h(\vec{u}, \vec{v}) = \overline{h(\vec{v}, \vec{u})}$, scrivere la matrice H associata a h nella base canonica di $\mathbb{C}^4$ e stabilire se la matrice H è hermitiana e se è unitaria.

v) Detto $L_H : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ l'operatore lineare associato a H, determinare i suoi autovalori e precisare se esiste una base ortonormale $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4)$ di $\mathbb{C}^4$ formata da suoi autovettori.

vi) Con quale matrice si rappresenta la forma hermitiana h nella base $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4)$ di $\mathbb{C}^4$?

Svolgimento (anche sul retro!):

Risposte: $B =$ | | B ortogonale | | B diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ | |

Base di Sylvester | | Equazioni cartesiane V_1 e V_2 | | $H =$ | |

H herm. | | H unitaria | | Autovalori di L_H | | Base o.n. autovettori | |

Esercizio 2. Consideriamo lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_2[t]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2. Consideriamo la forma bilineare simmetrica

$$b(p, q) := p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)\,.$$

Fissiamo la base standard $\{1, t, t^2\}$ con coordinate associate (a_0, a_1, a_2).
(i) Scrivere la matrice associata a $b(\ ,\ )$ nella base $\{1, t, t^2\}$.
(ii) Dimostrare che $b(\ ,\ )$ è definita positiva.
(iii) Consideriamo ora V con il prodotto scalare $b(\ ,\ )$. Sia $W := \mathrm{Span}(p_1, p_2)$ con $p_1(t) = 1$ e $p_2(t) = 1-t^2$. Determinare equazioni cartesiane per $W^\perp$; determinare $p \in W^\perp$ tale che $\|p\| = 1$.
(iv) Determinare la matrice associata nella base $\{1, t, t^2\}$ all'operatore P di proiezione ortogonale su W.

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Svolgimento (anche sul retro!):

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Risposte: Matrice di b Eq. cart. $W^\perp$ Vettori di norma 1

Matrice associata a P

N.B. La risposta al punto ii) va data nello Svolgimento!

Esercizio 3. Si considerino nello spazio affine $\mathbb{R}^3$ i piani

$$\pi_1 : 7x + 12y + 4z + 20 = 0,$$

$$\pi_2 : x - 8z - 4 = 0.$$

i) Verificato che i piani π_1, π_2 non sono paralleli, determinare i parametri direttori della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

ii) Considerando poi anche il piano

$$\alpha_{(h,k)} : 4x + 5y + hz + k = 0,$$

stabilire per quali valori di h, k risulta $r \subset \alpha_{(h,k)}$.

iii) Stabilire per quali valori di h, k la retta r è parallela a $\alpha_{(h,k)}$ e per quali valori di h, k la retta r è incidente $\alpha_{(h,k)}$.

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Svolgimento (anche sul retro!):

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Risposte:

Parametri direttori di r $\boxed{}$ Valori (h, k) tali che $r \subset \alpha_{(h,k)}$ $\boxed{}$

Valori (h, k) tali che $r, \alpha_{(h,k)}$ paralleli $\boxed{}$ Valori (h, k) tali che r incidente $\alpha_{(h,k)}$ $\boxed{}$