Geometria I - Canale M-Z - Prof. P. Piccinni

Prima prova in itinere - 16 aprile 2018

Compito B

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Norme per le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito nome, cognome, e numero di matricola su questo foglio.
2. Utilizzare la parte bianca (fronte e retro) di questi tre fogli per la bella copia. I fogli protocollo distribuiti a parte saranno invece utilizzati per la minuta e non devono essere consegnati.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, dando breve indicazione del procedimento e dei calcoli eseguiti, senza far riferimento alla minuta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza di esposizione.**
4. Durante le prove non si possono consultare testi e appunti, né utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **2 ore e 30 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	10	
2	10	
3	10	
Totale	30	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30:

Esercizio 1. Si consideri la forma bilineare simmetrica

$$\beta : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

definita per $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ da

$$\beta(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1.$$

i) Scrivere la matrice B associata a β nella base canonica di $\mathbb{R}^4$, stabilire se la matrice B è ortogonale e se l'operatore lineare $L_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato a B è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

ii) Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ in cui β si scrive in forma di Sylvester.

iii) Scrivere le equazioni cartesiane di due sottospazi vettoriali W_1, W_2 di $\mathbb{R}^4$ su cui β è rispettivamente definita positiva e definita negativa.

Si consideri poi l'applicazione

$$h : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$$

definita per $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{C}^4$ da

$$h(\vec{z}, \vec{w}) = z_1\bar{w}_4 + iz_2\bar{w}_3 - iz_3\bar{w}_2 + z_4\bar{w}_1.$$

iv) Verificare che h è hermitiana, ovvero che $h(\vec{z}, \vec{w}) = \overline{h(\vec{w}, \vec{z})}$, scrivere la matrice H associata a h nella base canonica di $\mathbb{C}^4$ e stabilire se la matrice H è hermitiana e se è unitaria.

v) Detto $L_H : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ l'operatore lineare associato a H, determinare i suoi autovalori e precisare se esiste una base ortonormale $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ di $\mathbb{C}^4$ formata da suoi autovettori.

vi) Con quale matrice si rappresenta la forma hermitiana h nella base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ di $\mathbb{C}^4$?

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Svolgimento (anche sul retro!):

Risposte: $B =$

B ortogonale

B diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

Base di Sylvester

Equazioni cartesiane W_1 e W_2

$H =$

H herm.

H unitaria

Autovalori di L_H

Base o.n. autovettori

Esercizio 2. Consideriamo lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_2[t]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2. Consideriamo la forma bilineare simmetrica

$$b(p,q) := p(-\frac{1}{2})q(-\frac{1}{2}) + p(0)q(0) + p(\frac{1}{2})q(\frac{1}{2}) .$$

Fissiamo la base standard $\{1, t, t^2\}$ con coordinate associate $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$.
(i) Scrivere la matrice associata a $b(\, , \,)$ nella base $\{1, t, t^2\}$.
(ii) Verificare che $b(\, , \,)$ è definita positiva.
(iii) Consideriamo ora V con il prodotto scalare $b(\, , \,)$. Sia $W := \mathrm{Span}(p_1, p_2)$ con $p_1(t) = 1$ e $p_2(t) = t - t^2$. Determinare equazioni cartesiane per $W^\perp$; determinare $p \in W^\perp$ tale che $\|p\| = 1$.
(iv) Determinare la matrice associata nella base $\{1, t, t^2\}$ all'operatore P di proiezione ortogonale su W.

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Svolgimento (anche sul retro!):

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Risposte: Matrice di b Eq. cart. $W^\perp$ Vettori di norma 1

Matrice associata a P

N.B. La risposta al punto ii) va data nello Svolgimento!

Esercizio 3. Si considerino nello spazio affine $\mathbb{R}^3$ i piani

$$\alpha : 3x + 5y + z + 8 = 0,$$

$$\beta : x + 2y + 2z + 4 = 0.$$

i) Verificato che i piani α, β non sono paralleli, determinare i parametri direttori della retta $s = \alpha \cap \beta$.

ii) Considerando poi anche il piano

$$\gamma_{(h,k)} : 4x + 5y + hz + k = 0,$$

stabilire per quali valori di h, k risulta $s \subset \gamma_{(h,k)}$.

iii) Stabilire per quali valori di h, k la retta s è parallela a $\gamma_{(h,k)}$ e per quali valori di h, k la retta s è incidente $\gamma_{(h,k)}$.

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Svolgimento (anche sul retro!):

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

Risposte:

Parametri direttori di s ☐ Valori (h, k) tali che $s \subset \gamma_{(h,k)}$ ☐

Valori (h, k) tali che $s, \gamma_{(h,k)}$ paralleli ☐ Valori (h, k) tali che s incidente $\gamma_{(h,k)}$ ☐