Geometria I - Canale M-Z

Prof. P. Piccinni

Risposte della seconda prova in itinere - 7 Giugno 2018

Esercizio 1. Si consideri in $P^2(\mathbb{R})$ il riferimento canonico dato dai quattro punti

$$P_1 = [1,0,0]\,, \;\; P_2 = [0,1,0]\,, \;\; P_3 = [0,0,1]\,, \;\; P_4 = [1,1,1]\,.$$

Siano $Q_1, \dots, Q_4$ i punti di coordinate omogenee:

$$Q_1 = [3,-1,1]\,, \;\; Q_2 = [0,2,0]\,, \;\; Q_3 = [1,-1,3]\,, \;\; Q_4 = [1,0,1]\,.$$

1. Verificare che la quaterna Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 consiste di punti in posizione generale.
2. Stabilire se esiste una proiettività $f : P^2(\mathbb{R}) \to P^2(\mathbb{R})$ tale che $f(P_j) = Q_j \; \forall j = 1, \dots, 4$ ed in caso affermativo descriverla tramite un elemento $[A] \in PGL(3, \mathbb{R})$, con $A \in GL(3, \mathbb{R})$.
3. Discutere l'unicità di f.
4. Stabilire se esistono sottospazi proiettivi (rette o punti) che sono lasciati fissi da una tale f ed in caso affermativo descriverli esplicitamente. (Un sottospazio S è lasciato fisso da una proiettività f se $f(P) = P \; \forall P \in S$.)
5. Vero o Falso: una proiettività $f : P^k(\mathbb{R}) \to P^k(\mathbb{R})$ con k dispari ammette sempre punti fissi. Spiegare.

Risposte: Verifica Q_j in pos. gen.: $\boxed{\text{tutti i minori di ordine 3 della matrice delle coordinate di } Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \text{ sono non nulli}}$

Equazioni di f o matrice A: $\boxed{A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$ Unicità di f: $\boxed{\text{dal teorema fondamentale sulle proiettività}}$

Sottospazi fissi: $\boxed{\text{retta } x_0 + x_2 = 0, \text{ punto } [1,-1,1]}$

Esercizio 2. Nel piano affine reale $A^2(\mathbb{R})$ si consideri al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione

$$X^2 - 2kXY + 4Y^2 + 2X + 4Y = 0\,.$$

1. Determinare per quali valori di k la conica è generale e per quali è degenere.
2. Determinare per quali valori di k la conica è un' ellisse, un' iperbole e una parabola (in ogni caso non degenere).

Risposte: k conica generale: $\boxed{k \neq -2}$ k ellisse: $\boxed{-2 < k < 2}$ k parabola: $\boxed{k = 2}$ k iperbole: $\boxed{k < -2, k > 2}$

Esercizio 3. Si consideri nel piano euclideo E^2, con coordinate cartesiane (x, y) la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana

$$X^2 + Y^2 + 10XY + 14\sqrt{2}X + 22\sqrt{2}Y + 52 = 0$$

1. Determinare una conica euclidea canonica $\mathcal{D}$ ed un'isometria $\psi : E^2 \to E^2$ tale che $\mathcal{C} = \psi(\mathcal{D})$.
2. Disegnare schematicamente la conica $\mathcal{C}$.
3. Dall'analisi fatta in **1** segue che la conica è a centro: determinare esplicitamente il centro.

Risposte: Equazione di $\mathcal{D}$: $\boxed{2x^2 - 3y^2 = 1}$ Equazioni di ψ: $\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - 2\sqrt{2},\; y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \sqrt{2}}$

Centro: $\boxed{(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})}$

Esercizio 4. Si considerino nel piano affine complesso $A^2(\mathbb{C})$, con coordinate cartesiane (x, y) le coniche $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ di equazioni cartesiane rispettivamente

$$\mathcal{C}_1 : X^2 + Y^2 - 5 = 0, \qquad \mathcal{C}_2 : XY + 2 = 0 :$$

1. Disegnare i supporti di $\mathcal{C}_1$ e di $\mathcal{C}_1$, e determinare (confrontando con il disegno) le coordinate dei quattro punti A, B, C, D di intersezione delle due coniche.
2. Scrivere le equazioni delle rette r, s che sono tangenti rispettivamente a $\mathcal{C}_1$ e a $\mathcal{C}_2$ in uno tra i quattro punti A, B, C, D (scelto dallo studente).
3. Sia poi $\mathcal{D} : (X^2 + Y^2 - 5)(XY + 2) = 0$ la quartica il cui supporto coincide con l'unione di quello delle due coniche. Stabilire se $\mathcal{D}$ presenta qualche simmetria, e verificare i punti A, B, C, D sono singolari per $\mathcal{D}$.
4. Si può affermare che le rette r_A, s_A; r_B, s_B; r_C, s_C; r_D, s_D tangenti rispettivamente a $\mathcal{C}_1$ e a $\mathcal{C}_2$ nei punti indicati sono le tangenti principali negli stessi punti alla quartica $\mathcal{D}$? [Motivare la risposta, con verifica analitica solo per la scelta tra A, B, C, D che è stata fatta al punto 2].

Risposte: A, B, C, D: $\boxed{A = (-2, 1), B = (-1, 2), C = (1, -2), D = (2, -1)}$

rette r, s: $\boxed{\text{in } A, r : 2x - y + 5 = 0, s : x - 2y + 4 = 0}$

Simmetrie $\mathcal{D}$: $\boxed{\text{origine e rette } y = \pm x}$

A, B, C, D singolari per $\mathcal{D}$: $\boxed{\text{sì}}$