Geometria I - Canale M-Z

Prof. P. Piccinni

Risposte della prova scritta del 28 Giugno 2018

Esercizio 1. Si consideri nello spazio euclideo $\mathbf{E}^3$, con coordinate cartesiane (x, y, z), i tre punti

$$P_1 = (2, 0, 0)\,, \quad P_2 = (0, 2, 0)\,, \quad P_3 = (0, 0, 2)\,.$$

1. Scrivere l'equazione cartesiana del piano α passante per P_1, P_2, P_3 e le equazioni parametriche della retta r passante per l'origine $O = (0, 0, 0)$ e perpendicolare a α.
2. Verificare che P_1, P_2, P_3 sono vertici di un triangolo equilatero Δ e calcolare l'area di Δ.
3. Determinare le coordinate dei due punti Q_1, Q_2 (necessariamente appartenenti alla retta r) tali che le quaterne P_1, P_2, P_3, Q_1 e P_1, P_2, P_3, Q_2 costituiscono i vertici di tetraedri regolari T_1 e T_2 in $\mathbf{E}^3$.
4. Determinare la distanza tra Q_1 e Q_2 e il volume dei tetraedri T_1 e T_2.

Risposte:

Eq. cart. α: $\boxed{x + y + z = 2}$ Eq. par. r: $\boxed{x = t, y = t, z = t}$ Δ equilatero: $\boxed{d(P_i, P_j) = \sqrt{8},\ i \neq j}$

Area di Δ: $\boxed{2\sqrt{3}}$ Q_1 e Q_2: $\boxed{Q_1 = (2, 2, 2),\ Q_2 = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})}$ $d(Q_1, Q_2)$: $\boxed{\frac{8}{\sqrt{3}}}$ Volumi T_1 e T_2: $\boxed{\frac{8}{3}}$

Esercizio 2. Si consideri nel piano proiettivo complesso $P^2(\mathbb{C})$, con coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, i cinque punti

$$A = [1, -1, 0]\,, \quad B = [1, i, 0]\,, \quad C = [1, 0, -1]\,, \quad D = [0, -1, i] \quad E = [0, 1, -1]\,.$$

1. Verificare che tra A, B, C, D, E è possibile estrarre due terne costituite da tre punti allineati.
2. Stabilire quali tra le quaterne estraibili da A, B, C, D, E costituiscono un riferimento proiettivo in $P^2(\mathbb{C})$.
3. Esiste una conica $\mathcal{C}$ di $P^2(\mathbb{C})$ il cui supporto contiene i punti A, B, C, D, E ? In caso affermativo, tale $\mathcal{C}$ è unica? Sempre in caso affermativo, scrivere l'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$ e precisare se $\mathcal{C}$ è generale o degenere.
4. Determinare gli eventuali punti singolari di $\mathcal{C}$.

Risposte:

Le due terne: $\boxed{BCD,\ ACE}$ Quali quaterne: $\boxed{ABDE}$ $\mathcal{C}$ esiste: $\boxed{\text{sì, la conica spezzata nelle due rette } BCD \text{ e } ACE}$

$\mathcal{C}$ è unica: $\boxed{\text{necessariamente da quanto sopra}}$ Eq. cart. $\mathcal{C}$: $\boxed{(x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + ix_1 + x_2) = 0}$

$\mathcal{C}$ generale o degenere: $\boxed{\text{degenere}}$ Rette componenti di $\mathcal{C}$: $\boxed{x_0 + x_1 + x_2 = 0,\ x_0 + ix_1 + x_2 = 0}$

Punti singolari di $\mathcal{C}$: $\boxed{C = [1, 0, -1]}$

Esercizio 3. Si considerino nel piano euclideo $\mathbf{E}^2$, con coordinate cartesiane (x, y) le ellissi $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ di equazione cartesiana

$$\mathcal{E}_1 :\ f(x, y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0, \qquad \mathcal{E}_2 :\ g(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0,$$

e il fascio di coniche

$$\mathcal{C}_k :\ f(x, y) + kg(x, y) = 0.$$

1. Determinare le coordinate dei punti di intersezione tra $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$, precisando se tali punti appartengono a tutte le coniche $\mathcal{C}_k$ del fascio.
2. Nel fascio $\mathcal{C}_k$ vi sono coniche degeneri (ovvero spezzate in una coppia di rette) ? Quante ? Si può utilizzare la risposta al punto 1 per scrivere le equazioni delle rette componenti di tali coniche degeneri ?
3. Stabilire se esistono valori di k per cui $\mathcal{C}_k$: i) è una parabola non degenere, ii)è un'iperbole non degenere, iii) è una circonferenza.

Risposte: $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$: $\boxed{A = (\frac{12}{5}, \frac{12}{5}),\ B = (\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}),\ C = (-\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}),\ D = (-\frac{12}{5}, \frac{12}{5})}$

Appartengono a tutte le $\mathcal{C}_k$: $\boxed{\text{sì}}$ Coniche deg. del fascio: $\boxed{k = -1, k = \frac{16}{9}, k = -\frac{9}{16}}$

Loro rette componenti: $\boxed{\text{rette } AB, CD, \text{ rette } AC, BD, \text{ rette } AD, BC}$

Parabole non degeneri: $\boxed{\text{nessuna}}$ Iperboli non degeneri: $\boxed{-\frac{16}{9} < k < -\frac{9}{16}}$ Circonferenze: $\boxed{k = 1}$

Esercizio 4. Si considerino nello spazio affine reale $A^3(\mathbb{R})$, con coordinate affini (x, y, z) le rette r_1, r_2, r_3, r_4 di equazioni parametriche rispettivamente

$$r_1 : \begin{cases} x = 3t, \\ y = 0, \\ z = t, \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = 0, \\ y = 2t, \\ z = t, \end{cases} \quad r_3 : \begin{cases} x = -3t, \\ y = 0, \\ z = t, \end{cases} \quad r_4 : \begin{cases} x = 0, \\ y = -2t, \\ z = t. \end{cases}$$

1. Determinare i parametri direttori di r_1, r_2, r_3, r_4 e le coordinate dei punti P_1, P_2, P_3, P_4 loro rispettive intersezioni con il piano $z = 1$.
2. Si consideri poi la famiglia di rette r_θ di equazioni parametriche

$$r_\theta : \begin{cases} x = 3t\cos\theta, \\ y = 2t\sin\theta, \\ z = t, \end{cases}$$

$(0 \le \theta < 2\pi)$, e si osservi che r_1, r_2, r_3, r_4 appartengono a tale famiglia rispettivamente per $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$. Si descriva la curva $\mathcal{C}$ descritta dai punti di intersezione P_θ delle rette r_θ con il piano $z = 1$.
3. Sia Γ la superficie quadrica (cono) di equazione cartesiana

$$\Gamma : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 0.$$

Si verifichi che le rette r_θ sono contenute nel cono Γ. Si faccia un disegno relativo ai punti 1,2,3.
4. Descrivere le curve $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ intersezioni del cono Γ con i piani rispettivamente $x = 3$ e $y = 2$.

Risposte:
Par. dir. r_1, r_2, r_3, r_4: $\boxed{(3, 0, 1),\ (0, 2, 1),\ (-3, 0, 1),\ (0, -2, 1)}$

P_1, P_2, P_3, P_4: $\boxed{P_1 = (3, 0, 1),\ P_2 = (0, 2, 1),\ P_3 = (-3, 0, 1),\ P_4 = (0, -2, 1)}$

Curva $\mathcal{C}$: $\boxed{\text{ellisse del piano } z = 1 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1}$

$\mathcal{D}$: $\boxed{\text{iperbole del piano } x = 3 : z^2 - \frac{y^2}{4} = 1}$ $\mathcal{E}$: $\boxed{\text{iperbole del piano } y = 2 : z^2 - \frac{x^2}{9} = 1}$