Geometria I - Canale M-Z - Prof. P. Piccinni

Risposte prima prova in itinere - 16 aprile 2018

Compito A

Esercizio 1. Si consideri la forma bilineare simmetrica

$$b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

definita per $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$ da

$$b(\vec{u}, \vec{v}) = -u_1 v_4 + u_2 v_3 + u_3 v_2 - u_4 v_1.$$

i) Scrivere la matrice B associata a b nella base canonica di $\mathbb{R}^4$, stabilire se la matrice B è ortogonale e se l'operatore lineare $L_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato a B è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

ii) Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ in cui b si scrive in forma di Sylvester.

iii) Scrivere le equazioni cartesiane di due sottospazi vettoriali V_1, V_2 di $\mathbb{R}^4$ su cui b è rispettivamente definita positiva e definita negativa.

Si consideri poi l'applicazione

$$h : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$$

definita per $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{C}^4$ da

$$h(\vec{u}, \vec{v}) = -u_1 \bar{v}_4 + i u_2 \bar{v}_3 - i u_3 \bar{v}_2 - u_4 \bar{v}_1.$$

iv) Verificare che h è hermitiana, ovvero che $h(\vec{u}, \vec{v}) = \overline{h(\vec{v}, \vec{u})}$, scrivere la matrice H associata a h nella base canonica di $\mathbb{C}^4$ e stabilire se la matrice H è hermitiana e se è unitaria.

v) Detto $L_H : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ l'operatore lineare associato a H, determinare i suoi autovalori e precisare se esiste una base ortonormale $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4)$ di $\mathbb{C}^4$ formata da suoi autovettori.

vi) Con quale matrice si rappresenta la forma hermitiana h nella base $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4)$ di $\mathbb{C}^4$?

Risposte: $B = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ B ortogonale $\boxed{si}$ B diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ $\boxed{si}$

Base di Sylvester: Colonne della matrice $\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$ Eq. cartesiane V_1 e V_2 $\boxed{\begin{cases} V_1 : x_1 = -x_4, \ x_2 = x_3 \\ V_2 : x_1 = x_4, \ x_2 = -x_3 \end{cases}}$

$H = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ H herm. $\boxed{si}$ H unitaria $\boxed{si}$ Autovalori di L_H $\boxed{1, -1}$ Base o.n. autovettori $\boxed{si}$

Esercizio 2. Consideriamo lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_2[t]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2. Consideriamo la forma bilineare simmetrica

$$b(p, q) := p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)\,.$$

Fissiamo la base standard $\{1, t, t^2\}$ con coordinate associate (a_0, a_1, a_2).
(i) Scrivere la matrice associata a $b(\ ,\ )$ nella base $\{1, t, t^2\}$.
(ii) Dimostrare che $b(\ ,\ )$ è definita positiva.
(iii) Consideriamo ora V con il prodotto scalare $b(\ ,\ )$. Sia $W := \mathrm{Span}(p_1, p_2)$ con $p_1(t) = 1$ e $p_2(t) = 1-t^2$. Determinare equazioni cartesiane per $W^\perp$; determinare $p \in W^\perp$ tale che $\|p\| = 1$.
(iv) Determinare la matrice associata nella base $\{1, t, t^2\}$ all'operatore P di proiezione ortogonale su W.

Risposte: Matrice di b: $\boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$ Eq. cart. $W^\perp$: $\boxed{a_0 = a_2 = 0}$ Vettori di norma 1: $\boxed{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}t}$

Matrice associata a P: $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Esercizio 3. Si considerino nello spazio affine $\mathbb{R}^3$ i piani

$$\pi_1 : 7x + 12y + 4z + 20 = 0,$$

$$\pi_2 : x - 8z - 4 = 0.$$

i) Verificato che i piani π_1, π_2 non sono paralleli, determinare i parametri direttori della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

ii) Considerando poi anche il piano

$$\alpha_{(h,k)} : 4x + 5y + hz + k = 0,$$

stabilire per quali valori di h, k risulta $r \subset \alpha_{(h,k)}$.

iii) Stabilire per quali valori di h, k la retta r è parallela a $\alpha_{(h,k)}$ e per quali valori di h, k la retta r è incidente $\alpha_{(h,k)}$.

Risposte:

Parametri direttori di r: $\boxed{(8, -5, 1)}$ Valori (h, k) tali che $r \subset \alpha_{(h,k)}$: $\boxed{h = -7, k = 4}$

Valori (h, k) tali che $r, \alpha_{(h,k)}$ paralleli : $\boxed{h = -7}$ Valori (h, k) tali che r incidente $\alpha_{(h,k)}$: $\boxed{h \neq -7}$