Geometria I - Canale M-Z - Prof. P. Piccinni

Risposte prima prova in itinere - 16 aprile 2018

Compito B

Esercizio 1. Si consideri la forma bilineare simmetrica

$$\beta : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

definita per $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ da

$$\beta(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1.$$

i) Scrivere la matrice B associata a β nella base canonica di $\mathbb{R}^4$, stabilire se la matrice B è ortogonale e se l'operatore lineare $L_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato a B è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

ii) Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ in cui β si scrive in forma di Sylvester.

iii) Scrivere le equazioni cartesiane di due sottospazi vettoriali W_1, W_2 di $\mathbb{R}^4$ su cui β è rispettivamente definita positiva e definita negativa.

Si consideri poi l'applicazione

$$h : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$$

definita per $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{C}^4$ da

$$h(\vec{z}, \vec{w}) = z_1\bar{w}_4 + iz_2\bar{w}_3 - iz_3\bar{w}_2 + z_4\bar{w}_1.$$

iv) Verificare che h è hermitiana, ovvero che $h(\vec{z}, \vec{w}) = \overline{h(\vec{w}, \vec{z})}$, scrivere la matrice H associata a h nella base canonica di $\mathbb{C}^4$ e stabilire se la matrice H è hermitiana e se è unitaria.

v) Detto $L_H : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ l'operatore lineare associato a H, determinare i suoi autovalori e precisare se esiste una base ortonormale $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ di $\mathbb{C}^4$ formata da suoi autovettori.

vi) Con quale matrice si rappresenta la forma hermitiana h nella base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ di $\mathbb{C}^4$?

Risposte: $B = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ B ortogonale $\boxed{si}$ B diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ $\boxed{si}$

Base di Sylvester: Colonne della matrice $\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$ Eq. cartesiane W_1 e W_2 $\boxed{\begin{cases} V_1 : x_1 = x_4, \ x_2 = x_3 \\ V_2 : x_1 = -x_4, \ x_2 = -x_3 \end{cases}}$

$H = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ H herm. $\boxed{si}$ H unitaria $\boxed{si}$ Autovalori di L_H $\boxed{1, -1}$ Base o.n. autovettori $\boxed{si}$

Esercizio 2. Consideriamo lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}_2[t]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 2. Consideriamo la forma bilineare simmetrica

$$b(p,q) := p(-\frac{1}{2})q(-\frac{1}{2}) + p(0)q(0) + p(\frac{1}{2})q(\frac{1}{2}) .$$

Fissiamo la base standard $\{1, t, t^2\}$ con coordinate associate $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$.
(i) Scrivere la matrice associata a $b(\, , \,)$ nella base $\{1, t, t^2\}$.
(ii) Verificare che $b(\, , \,)$ è definita positiva.
(iii) Consideriamo ora V con il prodotto scalare $b(\, , \,)$. Sia $W := \mathrm{Span}(p_1, p_2)$ con $p_1(t) = 1$ e $p_2(t) = t - t^2$. Determinare equazioni cartesiane per $W^\perp$; determinare $p \in W^\perp$ tale che $\|p\| = 1$.
(iv) Determinare la matrice associata nella base $\{1, t, t^2\}$ all'operatore P di proiezione ortogonale su W.

Risposte: Matrice di b: $\boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}}$ Eq. cart. $W^\perp$: $\boxed{6\alpha_0 + \alpha_2 = 0, \; 4\alpha_0 - 4\alpha_1 + \alpha_2 = 0}$

Vettori di norma 1: $\boxed{\pm\sqrt{\frac{2}{13}}(-2 + t + 12t^2)}$ Matrice associata a P: $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2/13 & 2/13 \\ 0 & 12/13 & -1/13 \\ 0 & -12/13 & 1/13 \end{pmatrix}}$

Esercizio 3. Si considerino nello spazio affine $\mathbb{R}^3$ i piani

$$\alpha : 3x + 5y + z + 8 = 0,$$

$$\beta : x + 2y + 2z + 4 = 0.$$

i) Verificato che i piani α, β non sono paralleli, determinare i parametri direttori della retta $s = \alpha \cap \beta$.

ii) Considerando poi anche il piano

$$\gamma_{(h,k)} : 4x + 5y + hz + k = 0,$$

stabilire per quali valori di h, k risulta $s \subset \gamma_{(h,k)}$.

iii) Stabilire per quali valori di h, k la retta s è parallela a $\gamma_{(h,k)}$ e per quali valori di h, k la retta s è incidente $\gamma_{(h,k)}$.

Risposte:
Parametri direttori di r: $\boxed{(8, -5, 1)}$ Valori (h, k) tali che $r \subset \alpha_{(h,k)}$: $\boxed{h = -7, k = 4}$

Valori (h, k) tali che $r, \alpha_{(h,k)}$ paralleli : $\boxed{h = -7}$ Valori (h, k) tali che r incidente $\alpha_{(h,k)}$: $\boxed{h \neq -7}$