

- Scrivere subito Matricola (obbligatoria), Cognome e Nome.
- Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo sono invece per riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore esatte

Matricola.....Cognome.....Nome.....

- Si consideri sull'insieme \mathbb{Z} degli interi relativi la *topologia cofinita* \mathcal{Z} , i cui chiusi sono i sottoinsiemi finiti di \mathbb{Z} . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- | | |
|---|--|
| 1 | $(\mathbb{Z}, \mathcal{Z})$ è compatto |
| 2 | $(\mathbb{Z}, \mathcal{Z})$ è connesso |
| 3 | $(\mathbb{Z}, \mathcal{Z})$ è di Hausdorff |
| 4 | \mathcal{Z} induce, su ogni sottoinsieme finito $S \subset \mathbb{Z}$, la topologia discreta |
| 5 | Nessuna delle precedenti |

- Si considerino i sottospazi

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| < 1, |y| < 1\} \text{ (quadrato aperto),} \quad Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\} \text{ (disco aperto),}$$

entrambi con la topologia euclidea indotta. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- | | |
|---|--|
| 1 | Y è un sottoinsieme aperto di X |
| 2 | \bar{Y} è un sottoinsieme chiuso di \bar{X} |
| 3 | $\mathcal{C}_X Y$ ha quattro componenti connesse e ognuna di esse è un aperto di X |
| 4 | $\mathcal{C}_X Y$ ha quattro componenti connesse e ognuna di esse è un chiuso di X |
| 5 | $\mathcal{C}_{\bar{X}} \bar{Y}$ ha quattro componenti connesse e ognuna di esse è un aperto di \bar{X} |
| 6 | $\mathcal{C}_{\bar{X}} \bar{Y}$ ha quattro componenti connesse e ognuna di esse è un chiuso di \bar{X} |
| 7 | Nessuna delle precedenti |

- Si considerino i seguenti sottospazi dell' \mathbb{R}^2 euclideo:

$X_1 =$ unione di due circonferenze tangenti esternamente, $X_2 =$ unione di due circonferenze tangenti internamente,

$X_3 =$ unione di due circonferenze secanti, $X_4 =$ unione di due circonferenze distinte e concentriche,

$X_5 =$ unione di una circonferenza e un suo diametro.

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- | | |
|---|--|
| 1 | X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sono a due a due non omeomorfi |
| 2 | X_1 è omeomorfo a X_2 |
| 3 | X_3 è omeomorfo a X_5 |
| 4 | X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sono tutti connessi |
| 5 | X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sono tutti compatti |
| 6 | X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sono tutte varietà topologiche |
| 7 | Nessuna delle precedenti |

4. Si consideri il sottospazio:

$$X = (a, b) \cup [c, d] \subset \mathbb{R}$$

con la topologia euclidea indotta, essendo $a < b \leq c < d$, e sia

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definita da} \quad f(x) = \begin{cases} a & \text{se } x \in (a, b) \\ x & \text{se } x \in [c, d] \end{cases}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1 f porta aperti in aperti
- 2 f porta chiusi in chiusi
- 3 per $b < c$, f è continua
- 4 per $b = c$, f è continua
- 5 Nessuna delle precedenti

5. Si consideri lo spazio metrico $X = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$, costituito dalle funzioni continue $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, con la distanza

$$d(f, g) = \max_{x \in [-1, 1]} \{|f(x) - g(x)|\},$$

e il suo sottospazio

$$S = \{f(x) = kx, k \in \mathbb{R}\}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1 S è limitato
- 2 S è aperto in X
- 3 S è compatto
- 4 S è connesso
- 5 Nessuna delle precedenti

6. Si consideri la topologia cofinita \mathcal{Z} in \mathbb{R} (i chiusi sono i sottoinsiemi finiti), e la successione

$$a = \{a_n\} = \begin{cases} a_n = 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ a_n = n & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1 la successione a non converge ad alcun numero reale
- 2 la successione a converge a tutti i numeri reali
- 3 la successione a converge a tutti e soli i numeri naturali pari
- 4 la successione a converge a zero
- 5 la successione a converge a zero e solo a zero

7. Sia $\mathcal{B} = \{B_i, i \in I\}$ una base per una topologia su X . Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi di X :

$$\mathcal{F} = \{\bigcup_X B_i, B_i \in \mathcal{B}\}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette (anche più risposte):

- 1 L'intersezione di tutti gli elementi di \mathcal{F} è necessariamente non vuota
- 2 L'intersezione di tutti gli elementi di \mathcal{F} è necessariamente vuota
- 3 Se $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ e se $x \notin F_1 \cup F_2$, allora esiste un $F \in \mathcal{F}$ con $x \notin F$, $F_1 \cup F_2 \subset F$
- 4 Se $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ e se $x \in F_1 \cup F_2$, allora esiste un $F \in \mathcal{F}$ con $x \in F$, $F \subset F_1 \cup F_2$
- 5 L'unione di tutti gli elementi di \mathcal{F} è necessariamente X
- 6 Nessuna delle precedenti