Prova scritta di Geometria II, a.a. 2016-17 - Prof. P. Piccinni - 4 luglio 2016

a. Scrivere subito Matricola (obbligatoria), Cognome e Nome.
b. Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo sono invece per riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
c. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore esatte

Matricola............................**Cognome**..**Nome**..

Preferenza per la prova orale: *Primo appello* *Secondo appello*

1. Nello spazio topologico $M_n(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$ delle matrici di ordine n ad elementi reali, con la topologia euclidea, si introduca la relazione di equivalenza
$$A \sim B \iff A = \pm B.$$
Siano $GL(n, \mathbb{R})$, $O(n)$ i sottospazi topologici di $M_n(\mathbb{R})$ costituiti rispettivamente dalle matrici invertibili e dalle matrici ortogonali, e si noti che $A \in GL(n, \mathbb{R}) \implies -A \in GL(n, \mathbb{R})$, e che $A \in O(n) \implies -A \in O(n)$. Con riferimento ai quozienti, stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   1. Il quoziente $GL(n, \mathbb{R})/\sim$ è compatto
   2. Il quoziente $GL(n, \mathbb{R})/\sim$ è connesso
   3. Il quoziente $O(n)/\sim$ è compatto
   4. Il quoziente $O(n)/\sim$ è connesso
   5. Nessuna delle precedenti

2. Siano X e Y spazi topologici e sia $X \times Y$ il loro prodotto. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   1. Se $X \times Y$ è compatto, allora almeno uno tra X e Y è compatto, ma l'altro può non esserlo
   2. Se $X \times Y$ è compatto, allora entrambi X e Y sono compatti
   3. Se $X \times Y$ è di Hausdoff, allora almeno uno tra X e Y è di Hausdorff, ma l'altro può non esserlo
   4. Se $X \times Y$ è di Hausdorff, allora entrambi X e Y sono di Hausdorff
   5. Nessuna delle precedenti

3. Sia X un insieme, siano τ_1 e τ_2 topologie su X e si assuma che $\tau_1 \prec \tau_2$, ovvero che τ_1 sia *meno fine* di τ_2. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   1. Se (X, τ_1) è di Hausdorff, anche (X, τ_2) lo è
   2. Se (X, τ_1) è compatto, anche (X, τ_2) lo è
   3. Se (X, τ_1) è connesso, anche (X, τ_2) lo è
   4. Nessuna delle precedenti

4. Si consideri sul piano proiettivo $\mathbb{R}P^2$ (topologia indotta dalla topologia euclidea) la successione di punti
$$p_n = [1, \frac{1}{n}, n],$$
dove $[x_0, x_1, x_2]$ sono le coordinate proiettive omogenee. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

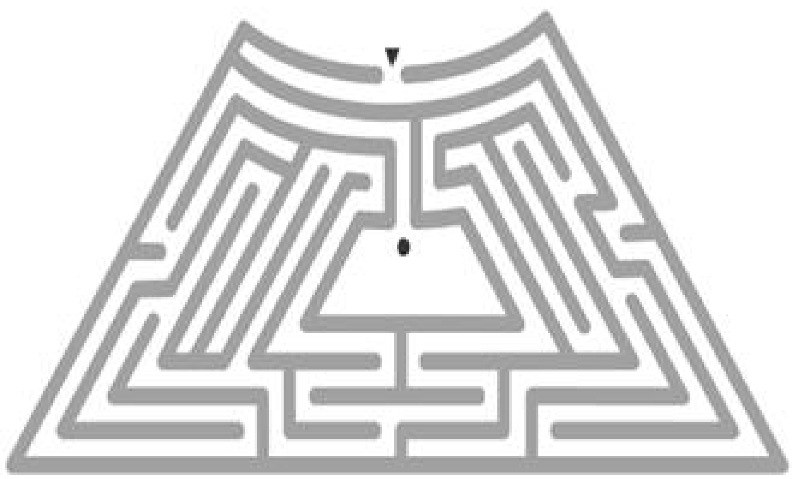
   1. La successione $\{p_n\}$ non converge
   2. La successione $\{p_n\}$ converge al punto $[1, 0, 0]$
   3. La successione $\{p_n\}$ converge al punto $[1, 0, 1]$
   4. La successione $\{p_n\}$ converge al punto $[0, 0, 1]$
   5. Nessuna delle precedenti

5. Sia $\mathbb{R}^2 \to T^2$ il rivestimento universale del toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ La retta $y = mx + q$ di $\mathbb{R}^2$ si proietta sempre ad una curva chiusa su T^2
$\boxed{2}$ La retta $y = mx + q$ di $\mathbb{R}^2$ si proietta ad una curva chiusa su T^2 se e solo se m è razionale
$\boxed{3}$ La retta $y = mx + q$ di $\mathbb{R}^2$ si proietta ad una curva chiusa su T^2 se e solo se m, q sono razionali
$\boxed{4}$ La retta $y = mx + q$ di $\mathbb{R}^2$ si proietta ad una curva chiusa su T^2 se e solo se m è intero
$\boxed{5}$ La retta $y = mx + q$ di $\mathbb{R}^2$ si proietta ad una curva chiusa su T^2 se e solo se m, q sono interi
$\boxed{6}$ Nessuna delle precedenti

6. Si consideri il complementare X in $\mathbb{R}^2$ della parte S di piano occupato dalle siepi del seguente labirinto (di Hampton Court):

$$X = \complement_{\mathbb{R}^2} S.$$



Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ X è connesso per archi
$\boxed{2}$ X è semplicemente connesso
$\boxed{3}$ X è contraibile
$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

7. Si consideri il gruppo $\mathbb{Z}_3$ generato dalla rotazione di 120 gradi attorno all'asse verticale della sfera S^2, e sia $S^2/\mathbb{Z}_3$ lo spazio delle orbite. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ $\mathbb{Z}_3$ agisce in modo propriamente discontinuo su S^2
$\boxed{2}$ $S^2/\mathbb{Z}_3$ è uno spazio di Hausdorff
$\boxed{3}$ $S^2/\mathbb{Z}_3$ è uno spazio compatto
$\boxed{4}$ La proiezione $S^2 \to S^2/\mathbb{Z}_3$ è un rivestimento
$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti