

Prova scritta di Geometria II, a.a. 2016-17 - Prof. P. Piccini - 26 settembre 2016

- Scrivere subito Matricola (obbligatoria), Cognome e Nome.
- Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo sono invece per riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore esatte

Matricola.....Cognome.....Nome.....

1. Sia  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2) = \{X \subseteq \mathbb{R}^2\}$  l'insieme dei sottoinsiemi  $X$  di  $\mathbb{R}^2$ , e su ognuno di tali  $X$  la topologia euclidea indotta. Stabilire quali tra le seguenti proprietà sono invarianti per omeomorfismi tra sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$  (anche più risposte):

- 1  $X$  è chiuso in  $\mathbb{R}^2$
- 2  $X$  è limitato in  $\mathbb{R}^2$
- 3  $X$  è chiuso e limitato in  $\mathbb{R}^2$
- 4  $X$  è connesso ma non connesso per archi in  $\mathbb{R}^2$
- 5 Nessuna delle precedenti

2. Si ricordi che se  $X$  è uno spazio di Hausdorff e  $K \subseteq X$  un suo sottospazio compatto, allora  $K$  è chiuso in  $X$ . Se  $X$  non è di Hausdorff l'implicazione  $K \subseteq X$  compatto  $\Rightarrow K \subseteq X$  chiuso può non valere. Stabilire, nello spazio topologico  $(\mathbb{R}, i_d)$ , dove

$$i_d = \{\emptyset, \mathbb{R}, (a, +\infty), a \in \mathbb{R}\}$$

è la topologia della semicontinuità inferiore (non di Hausdorff), quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1  $K = [0, 1]$  (intervallo con gli estremi) è compatto ma non chiuso in  $(\mathbb{R}, i_d)$
- 2  $K = (0, 1)$  (intervallo senza gli estremi) è compatto ma non chiuso in  $(\mathbb{R}, i_d)$
- 3  $K = \{0, 1\}$  (solo due punti) è compatto ma non chiuso in  $(\mathbb{R}, i_d)$
- 4 Nessuna delle precedenti

3. Sia  $X$  uno spazio topologico con la seguente proprietà: ogni aperto di  $X$  è anche chiuso. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1 Se la topologia non è la topologia banale, allora  $X$  è sconnesso
- 2 Se la topologia non è la topologia banale, allora  $X$  è totalmente sconnesso
- 3 Se la topologia non è la topologia banale, allora  $X$  è sconnesso per archi
- 4 Nessuna delle precedenti

4. Sia  $X$  uno spazio topologico connesso per archi e si supponga che  $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$ . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1  $X$  è omeomorfo a  $S^1$
- 2 Ogni rivestimento di  $X$  è regolare
- 3  $X$  non è contraibile
- 4 Nessuna delle precedenti

5. Nello spazio topologico  $M_n(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$  delle matrici  $n \times n$ , con la topologia euclidea, si consideri il sottospazio

$$S = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ con } \det A = 1\}$$

( $S$  si denota spesso con il simbolo  $SL(n, \mathbb{R})$  e si chiama "gruppo lineare speciale"). Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1  $S$  è aperto in  $M_n(\mathbb{R})$
- 2  $S$  è chiuso in  $M_n(\mathbb{R})$
- 3  $S$  è compatto
- 4  $S$  è omeomorfo al "gruppo ortogonale"  $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), AA^t = I\}$
- 5 Nessuna delle precedenti

6. Siano

$$p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X, \quad p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$$

due rivestimenti di uno spazio connesso per archi  $X$ , e si supponga che esista un'applicazione continua suriettiva  $p : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ , che sia ancora un rivestimento e tale che  $p_2 \circ p = p_1$ . Sia  $x_1 \in \tilde{X}_1$  e  $x_2 = p(x_1)$ . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1  $G_1 = p_{1*}[\pi_1(\tilde{X}_1, x_1)]$  è un sottogruppo di  $G_2 = p_{2*}[\pi_1(\tilde{X}_2, x_2)]$
- 2  $G_2 = p_{2*}[\pi_1(\tilde{X}_2, x_2)]$  è un sottogruppo di  $G_1 = p_{1*}[\pi_1(\tilde{X}_1, x_1)]$
- 3 Se  $\pi(X)$  è abeliano, allora  $G_1 = G_2$
- 4 Nessuna delle precedenti

7. Si considerino gli spazi proiettivi reali  $\mathbb{R}P^n$  e complessi  $\mathbb{C}P^n$ . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1  $\mathbb{R}P^n$  è una varietà topologica di dimensione  $n$  e  $\mathbb{C}P^n$  è una varietà topologica di dimensione  $2n$
- 2 Non esiste un  $n \geq 1$  tale che  $\mathbb{C}P^n$  sia omeomorfo a  $\mathbb{R}P^{2n}$
- 3 Non esiste un  $n \geq 1$  tale che  $\mathbb{C}P^n$  sia omeomorfo al rivestimento universale di  $\mathbb{R}P^{2n}$
- 4 Nessuna delle precedenti