Prova scritta di Geometria II, a.a. 2016-17 - Prof. P. Piccinni - 26 settembre 2016

a. Scrivere subito Matricola (obbligatoria), Cognome e Nome.
b. Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo sono invece per riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
c. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore esatte

Matricola............................**Cognome**..**Nome**...

1. Sia $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2) = \{X \subseteq \mathbb{R}^2\}$ l'insieme dei sottoinsiemi X di $\mathbb{R}^2$, e su ognuno di tali X la topologia euclidea indotta. Stabilire quali tra le seguenti proprietà sono invarianti per omeomorfismi tra sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ (anche più risposte):

   $\boxed{1}$ X è chiuso in $\mathbb{R}^2$
   $\boxed{2}$ X è limitato in $\mathbb{R}^2$
   $\boxed{\bowtie 3}$ X è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$
   $\boxed{\bowtie 4}$ X è connesso ma non connesso per archi in $\mathbb{R}^2$
   $\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

2. Si ricordi che se X è uno spazio di Hausdorff e $K \subseteq X$ un suo sottospazio compatto, allora K è chiuso in X. Se X non è di Hausdorff l'implicazione $K \subseteq X$ compatto $\Rightarrow K \subseteq X$ chiuso può non valere. Stabilire, nello spazio topologico $(\mathbb{R}, i_d)$, dove
$$i_d = \{\emptyset, \mathbb{R}, (a, +\infty), a \in \mathbb{R}\}$$
   è la topologia della semicontinuità inferiore (non di Hausdorff), quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   $\boxed{\bowtie 1}$ $K = [0, 1]$ (intervallo con gli estremi) è compatto ma non chiuso in $(\mathbb{R}, i_d)$
   $\boxed{2}$ $K = (0, 1)$ (intervallo senza gli estremi) è compatto ma non chiuso in $(\mathbb{R}, i_d)$
   $\boxed{\bowtie 3}$ $K = \{0, 1\}$ (solo due punti) è compatto ma non chiuso in $(\mathbb{R}, i_d)$
   $\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

3. Sia X uno spazio topologico con la seguente proprietà: ogni aperto di X è anche chiuso. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   $\boxed{\bowtie 1}$ Se la topologia non è la topologia banale, allora X è sconnesso
   $\boxed{2}$ Se la topologia non è la topologia banale, allora X è totalmente sconnesso
   $\boxed{\bowtie 3}$ Se la topologia non è la topologia banale, allora X è sconnesso per archi
   $\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

4. Sia X uno spazio topologico connesso per archi e si supponga che $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ X è omeomorfo a S^1
$\boxed{\bowtie 2}$ Ogni rivestimento di X è regolare
$\boxed{\bowtie 3}$ X non è contraibile
$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

5. Nello spazio topologico $M_n(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$ delle matrici $n \times n$, con la topologia euclidea, si consideri il sottospazio

$$S = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ con } \det A = 1\}$$

(S si denota spesso con il simbolo $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ e si chiama "gruppo lineare speciale"). Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ S è aperto in $M_n(\mathbb{R})$
$\boxed{\bowtie 2}$ S è chiuso in $M_n(\mathbb{R})$
$\boxed{3}$ S è compatto
$\boxed{4}$ S è omeomorfo al "gruppo ortogonale" $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}),\ AA^t = I\}$
$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

6. Siano

$$p_1 : \widetilde{X}_1 \to X, \quad p_2 : \widetilde{X}_2 \to X$$

due rivestimenti di uno spazio connesso per archi X, e si supponga che esista un'applicazione continua suriettiva $p : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$, che sia ancora un rivestimento e tale che $p_2 \circ p = p_1$. Sia $x_1 \in \widetilde{X}_1$ e $x_2 = p(x_1)$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$ $G_1 = p_{1*}[\pi_1(\widetilde{X}_1, x_1)]$ è un sottogruppo di $G_2 = p_{2*}[\pi_1(\widetilde{X}_2, x_2)]$
$\boxed{2}$ $G_2 = p_{2*}[\pi_1(\widetilde{X}_2, x_2)]$ è un sottogruppo di $G_1 = p_{1*}[\pi_1(\widetilde{X}_1, x_1)]$
$\boxed{3}$ Se $\pi(X)$ è abeliano, allora $G_1 = G_2$
$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

7. Si considerino gli spazi proiettivi reali $\mathbb{R}P^n$ e complessi $\mathbb{C}P^n$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$ $\mathbb{R}P^n$ è una varietà topologica di dimensione n e $\mathbb{C}P^n$ è una varietà topologica di dimensione $2n$
$\boxed{\bowtie 2}$ Non esiste un $n \geq 1$ tale che $\mathbb{C}P^n$ sia omeomorfo a $\mathbb{R}P^{2n}$
$\boxed{3}$ Non esiste un $n \geq 1$ tale che $\mathbb{C}P^n$ sia omeomorfo al rivestimento universale di $\mathbb{R}P^{2n}$
$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti