

- Scrivere subito Matricola (obbligatoria), Cognome e Nome.
- Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo sono invece per riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore esatte

Matricola.....Cognome.....Nome.....

1. Siano

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 4\}, \quad \bar{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

rispettivamente la corona circolare aperta e la sua chiusura. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- |   |  |
|---|--|
| 1 | $C$ e $\bar{C}$ sono omeomorfe                     |
| 2 | $C$ e $\bar{C}$ sono omotopicamente equivalenti    |
| 3 | $C$ e $\bar{C}$ sono semplicemente connesse        |
| 4 | $C$ e $\bar{C}$ hanno gruppi fondamentali isomorfi |
| 5 | Nessuna delle precedenti                           |

2. Sia  $E^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$  il disco chiuso e si consideri il prodotto topologico

$$X = E^2 \times S^1.$$

Si consideri anche la *sfera cava* (corona circolare sferica chiusa)

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- |   |   |
|---|---|
| 1 | $X$ è omeomorfo a un <i>toro solido</i> di $\mathbb{R}^3$   |
| 2 | $X$ e $Y$ sono omeomorfi                                    |
| 3 | $X$ e $Y$ sono varietà topologiche compatte di dimensione 3 |
| 4 | $X$ e $Y$ hanno gruppi fondamentali isomorfi                |
| 5 | Nessuna delle precedenti                                    |

3. Sia  $\varphi : X \rightarrow Y$  un'applicazione continua tra spazi topologici connessi per archi. Si assuma che l'indotta

$$\varphi_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$$

sia un isomorfismo di gruppi. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- |   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| 1 | $\varphi$ è un'equivalenza omotopica |
| 2 | $\varphi$ è un omeomorfismo          |
| 3 | $\varphi$ è un rivestimento          |
| 4 | $\varphi$ non può essere iniettiva   |
| 5 | Nessuna delle precedenti             |

4. Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un rivestimento con  $\tilde{X}, X$  spazi topologici connessi per archi. Si assuma che per qualche  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  l'indotta

$$p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \longrightarrow \pi_1(X, p(\tilde{x}))$$

sia suriettiva. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- |   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| 1 | $p$ è suriettiva                    |
| 2 | $p$ è un omeomorfismo               |
| 3 | $p$ è un rivestimento regolare      |
| 4 | $\pi_1(X, p(\tilde{x}))$ è abeliano |
| 5 | Nessuna delle precedenti            |

5. Sia  $S$  una superficie topologica connessa e compatta, dunque omeomorfa a una e una sola delle seguenti:

i) la sfera  $S^2$

ii) per qualche  $g$  la superficie orientabile  $S_g$ , somma connessa di  $g$  tori  $T^2$

iii) per qualche  $r$  la superficie non orientabile  $S_{[r]}$ , somma connessa di  $r$  piani proiettivi  $\mathbb{R}P^2$ .

Sia  $\chi(S)$  la sua caratteristica di Eulero. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- |   |   |
|---|---|
| 1 | Se $\pi_1(S)$ è abeliano, allora $S$ è omeomorfa a una tra $S^2, T^2, \mathbb{R}P^2$                    |
| 2 | Se $\chi(S) = 0$ allora $S$ è omeomorfa a una tra il toro $T^2$ e la bottiglia di Klein $K^2 = S_{[2]}$ |
| 3 | $S$ ha per retratto di deformazione un bouquet di circonferenze   |
| 4 | Nessuna delle precedenti  |

6. Sia  $C_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2s)^2 + y^2 - 1 = 0\}$  la circonferenza di centro il punto  $A_s = (2s, 0)$  e raggio 1, e sia

$$C_S = \bigcup_{s=0,1,\dots,S} C_s$$

la *collana* di  $S + 1$  circonferenze. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- |   |   |
|---|---|
| 1 | $C_S$ è semplicemente connesso                                  |
| 2 | $\pi_1(C_S)$ è abeliano   |
| 3 | $\pi_1(C_S)$ è isomorfo al gruppo libero con $S + 1$ generatori |
| 4 | Nessuna delle precedenti  |

7. Sia  $G$  un gruppo di omeomorfismi che agisce in modo propriamente discontinuo sullo spazio topologico connesso per archi  $X$ , e sia  $X/G$  lo spazio delle orbite. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- |   |  |
|---|--|
| 1 | Se $X$ è semplicemente connesso, anche $X/G$ è semplicemente connesso  |
| 2 | $\pi_1(X/G)$ è isomorfo a $G$  |
| 3 | Se $X$ è contraibile, allora $\pi_1(X/G)$ è isomorfo a $G$             |
| 4 | Se $\pi_1(X/G)$ è isomorfo a $G$ , allora $X$ è semplicemente connesso |
| 5 | Nessuna delle precedenti   |

a