Esonero di Geometria II, a.a. 2016-17 - Prof. P. Piccinni - 7 giugno 2016

a. Scrivere subito Matricola (obbligatoria), Cognome e Nome.
b. Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo sono invece per riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
c. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore esatte

Matricola............................**Cognome**..**Nome**...

1. Siano
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 4\}, \qquad \overline{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$
rispettivamente la corona circolare aperta e la sua chiusura. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ C e $\overline{C}$ sono semplicemente connesse
$\boxed{2}$ C e $\overline{C}$ hanno gruppi fondamentali isomorfi
$\boxed{3}$ C e $\overline{C}$ sono omeomorfe
$\boxed{4}$ C e $\overline{C}$ sono omotopicamente equivalenti
$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

2. Sia $E^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco chiuso e si consideri il prodotto topologico
$$X = E^2 \times S^1.$$
Si consideri anche la *sfera cava* (corona circolare sferica chiusa)
$$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \ \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$
Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ X e Y sono varietà topologiche compatte di dimensione 3
$\boxed{2}$ X e Y sono omeomorfi
$\boxed{3}$ X e Y hanno gruppi fondamentali isomorfi
$\boxed{4}$ X è omeomorfo a un *toro solido* di $\mathbb{R}^3$
$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

3. Sia G un gruppo di omeomorfismi che agisce in modo propriamente discontinuo sullo spazio topologico connesso per archi X, e sia X/G lo spazio delle orbite. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ $\pi_1(X/G)$ è isomorfo a G
$\boxed{2}$ Se X è semplicemente connesso, anche X/G è semplicemente connesso
$\boxed{3}$ Se $\pi_1(X/G)$ è isomorfo a G, allora X è semplicemente connesso
$\boxed{4}$ Se X è contraibile, allora $\pi_1(X/G)$ è isomorfo a G
$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

4. Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento con $\tilde{X}, X$ spazi topologici connessi per archi. Si assuma che per qualche $\tilde{x} \in \tilde{X}$ l'indotta

$$p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \longrightarrow \pi_1(X, p(\tilde{x}))$$

sia suriettiva. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ $\pi_1(X, p(\tilde{x}))$ è abeliano
$\boxed{2}$ p è suriettiva
$\boxed{3}$ p è un omeomorfismo
$\boxed{4}$ p è un rivestimento regolare
$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

5. Sia $\varphi : X \to Y$ un'applicazione continua tra spazi topologici connessi per archi. Si assuma che l'indotta

$$\varphi_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$$

sia un isomorfismo di gruppi. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ φ è un omeomorfismo
$\boxed{2}$ φ è un rivestimento
$\boxed{3}$ φ è un'equivalenza omotopica
$\boxed{4}$ φ non può essere iniettiva
$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

6. Sia $\mathcal{C}_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2s)^2 + y^2 - 1 = 0\}$ la circonferenza di centro il punto $A_s = (2s, 0)$ e raggio 1, e sia

$$C_S = \bigcup_{s=0,1,\ldots,S} \mathcal{C}_s$$

la *collana* di $S + 1$ circonferenze. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ C_S è semplicemente connesso
$\boxed{2}$ $\pi_1(C_S)$ è isomorfo al gruppo libero con $S + 1$ generatori
$\boxed{3}$ $\pi_1(C_S)$ è abeliano
$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

7. Sia S una superficie topologica connessa e compatta, dunque omeomorfa a una e una sola delle seguenti:
i) la sfera S^2
ii) per qualche g la superficie orientabile S_g, somma connessa di g tori T^2
iii) per qualche r la superficie non orientabile $S_{[r]}$, somma connessa di r piani proiettivi $\mathbb{R}P^2$.
Sia $\chi(S)$ la sua caratteristica di Eulero. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ S ha per retratto di deformazione un bouquet di circonferenze
$\boxed{2}$ Se $\pi_1(S)$ è abeliano, allora S è omeomorfa a una tra $S^2, T^2, \mathbb{R}P^2$
$\boxed{3}$ Se $\chi(S) = 0$ allora S è omeomorfa a una tra il toro T^2 e la bottiglia di Klein $K^2 = S_{[2]}$
$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

b