

- Scrivere subito Matricola (obbligatoria), Cognome e Nome.
- Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo sono invece per riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore esatte

Matricola.....Cognome.....Nome.....

1. Siano

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 4\}, \quad \bar{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

rispettivamente la corona circolare aperta e la sua chiusura. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1 | C e \bar{C} sono semplicemente connesse |
| <input checked="" type="checkbox"/> 2 | C e \bar{C} hanno gruppi fondamentali isomorfi |
| 3 | C e \bar{C} sono omeomorfe |
| <input checked="" type="checkbox"/> 4 | C e \bar{C} sono omotopicamente equivalenti |
| 5 | Nessuna delle precedenti |

2. Sia $E^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco chiuso e si consideri il prodotto topologico

$$X = E^2 \times S^1.$$

Si consideri anche la *sfera cava* (corona circolare sferica chiusa)

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1 | X e Y sono varietà topologiche compatte di dimensione 3 |
| 2 | X e Y sono omeomorfi |
| 3 | X e Y hanno gruppi fondamentali isomorfi |
| <input checked="" type="checkbox"/> 4 | X è omeomorfo a un <i>toro solido</i> di \mathbb{R}^3 |
| 5 | Nessuna delle precedenti |

3. Sia G un gruppo di omeomorfismi che agisce in modo propriamente discontinuo sullo spazio topologico connesso per archi X , e sia X/G lo spazio delle orbite. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1 | $\pi_1(X/G)$ è isomorfo a G |
| 2 | Se X è semplicemente connesso, anche X/G è semplicemente connesso |
| <input checked="" type="checkbox"/> 3 | Se $\pi_1(X/G)$ è isomorfo a G , allora X è semplicemente connesso |
| <input checked="" type="checkbox"/> 4 | Se X è contraibile, allora $\pi_1(X/G)$ è isomorfo a G |
| 5 | Nessuna delle precedenti |

4. Sia $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un rivestimento con \tilde{X}, X spazi topologici connessi per archi. Si assuma che per qualche $\tilde{x} \in \tilde{X}$ l'indotta

$$p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \longrightarrow \pi_1(X, p(\tilde{x}))$$

sia suriettiva. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | $\pi_1(X, p(\tilde{x}))$ è abeliano |
| <input checked="" type="checkbox"/> | p è suriettiva |
| <input checked="" type="checkbox"/> | p è un omeomorfismo |
| <input checked="" type="checkbox"/> | p è un rivestimento regolare |
| 5 | Nessuna delle precedenti |

5. Sia $\varphi : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua tra spazi topologici connessi per archi. Si assuma che l'indotta

$$\varphi_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$$

sia un isomorfismo di gruppi. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1 | φ è un omeomorfismo |
| 2 | φ è un rivestimento |
| 3 | φ è un'equivalenza omotopica |
| 4 | φ non può essere iniettiva |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Nessuna delle precedenti |

6. Sia $C_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2s)^2 + y^2 - 1 = 0\}$ la circonferenza di centro il punto $A_s = (2s, 0)$ e raggio 1, e sia

$$C_S = \bigcup_{s=0,1,\dots,S} C_s$$

la *collana* di $S + 1$ circonferenze. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1 | C_S è semplicemente connesso |
| <input checked="" type="checkbox"/> | $\pi_1(C_S)$ è isomorfo al gruppo libero con $S + 1$ generatori |
| 3 | $\pi_1(C_S)$ è abeliano |
| 4 | Nessuna delle precedenti |

7. Sia S una superficie topologica connessa e compatta, dunque omeomorfa a una e una sola delle seguenti:

i) la sfera S^2

ii) per qualche g la superficie orientabile S_g , somma connessa di g tori T^2

iii) per qualche r la superficie non orientabile $S_{[r]}$, somma connessa di r piani proiettivi $\mathbb{R}P^2$.

Sia $\chi(S)$ la sua caratteristica di Eulero. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1 | S ha per retratto di deformazione un bouquet di circonferenze |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Se $\pi_1(S)$ è abeliano, allora S è omeomorfa a una tra $S^2, T^2, \mathbb{R}P^2$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> | Se $\chi(S) = 0$ allora S è omeomorfa a una tra il toro T^2 e la bottiglia di Klein $K^2 = S_{[2]}$ |
| 4 | Nessuna delle precedenti |

b