Prova scritta di Geometria II, a.a. 2016-17 - Prof. P. Piccinni - 22 luglio 2016

a. Scrivere subito Matricola (obbligatoria), Cognome e Nome.
b. Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo sono invece per riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
c. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore esatte

Matricola............................**Cognome**..**Nome**...

1. Sia X uno spazio topologico che goda della seguente proprietà: "Ogni sottoinsieme aperto è anche chiuso". Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   $\boxed{1}$ L'unione arbitraria di chiusi è un chiuso
   $\boxed{2}$ L'intersezione arbitraria di aperti è un aperto
   $\boxed{3}$ La topologia su X è la topologia discreta
   $\boxed{4}$ Se X ha almeno due punti, esso è sconnesso
   $\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

2. Siano τ_1 e τ_2 due topologie sull'insieme X. Si consideri l'insieme prodotto cartesiano $X \times X$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   $\boxed{1}$ Gli spazi topologici $(X \times X,\ \tau_1 \times \tau_2)$ e $(X \times X,\ \tau_2 \times \tau_1)$ sono omeomorfi
   $\boxed{2}$ Se $\tau_1 < \tau_2$ (strettamente meno fine), allora $\tau_1 \times \tau_2$ e $\tau_2 \times \tau_1$ sono topologie non confrontabili
   $\boxed{3}$ Se X è finito, allora $(X \times X,\ \tau_1 \times \tau_2)$ è compatto
   $\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

3. Siano T, T' i tori di $\mathbb{R}^3$ generati dalle rotazioni attorno all'asse z delle circonferenze rispettivamente

   $$C:\ (x-3)^2 + z^2 = 4, \quad C':\ (x-3)^2 + z^2 = 1.$$

   del piano xz. Si noti che C, C' sono concentriche con centro in $(3, 0, 0)$ e di raggio risp. 2,1. Sia $X = T \cup T'$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   $\boxed{1}$ X è connesso
   $\boxed{2}$ X è compatto
   $\boxed{3}$ $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}^4 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ per ogni $x_0 \in X$
   $\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

4. Sia X uno spazio topologico finito. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ X è necessariamente connesso
$\boxed{2}$ X è necessariamente compatto
$\boxed{3}$ Se X è di Hausdorff, allora la sua topologia è necessariamente la topologia discreta
$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

5. Sia $S_g = T^2 \# \ldots^{(g)} \ldots \# T^2$ la superficie compatta orientabile di genere g, somma connessa di g tori ($g \geq 1$). Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ Se $\pi_1(S_g)$ è abeliano, allora $g = 1$
$\boxed{2}$ Se la caratteristica di Eulero è $\chi(S_g) = -4$ allora $g = 2$
$\boxed{3}$ Se $S_g \# \mathbb{R}P^2$ è omeomorfa a S_5 (somma connessa di 5 tori), allora $g = 2$
$\boxed{4}$ $S_g \# S_{g'}$ è omeomorfa a $S_{g+g'}$
$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

6. Sia M una varietà topologica connessa. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ Per ogni sottogruppo $G \subset \pi_1(X, x)$ di indice n esiste un rivestimento a n fogli $p : \tilde{X} \to X$ con $G = p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})]$
$\boxed{2}$ Sia $\pi_1(X, x)$ infinito. Per ogni sgr finito $G \subset \pi_1(X, x)$ esiste $p : \tilde{X} \to X$ con infiniti fogli e con $G = p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})]$
$\boxed{3}$ Sia $\pi_1(X, x)$ abeliano, e siano $\tilde{X}, \tilde{X}_1$ due rivestimenti di X. Allora $\tilde{X}$ e $\tilde{X}_1$ sono omeomorfi
$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

7. Si considerino su $\mathbb{R}$ e sulla circonferenza S^1 le topologie euclidee. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ Esistono applicazioni $f : S^1 \to \mathbb{R}$ suriettive ma non continue
$\boxed{2}$ Esistono applicazioni $f : S^1 \to \mathbb{R}$ continue ma non suriettive
$\boxed{3}$ Esistono applicazioni $f : S^1 \to \mathbb{R}$ suriettive e continue
$\boxed{4}$ Esistono applicazioni $g : \mathbb{R} \to S^1$ suriettive e continue
$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti