

Prova scritta di Geometria II, a.a. 2016-17 - Prof. P. Piccini - 12 settembre 2016

- Scrivere subito Matricola (obbligatoria), Cognome e Nome.
- Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo sono invece per riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
- Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore esatte

Matricola.....Cognome.....Nome.....

Preferenza per la prova orale:

Primo appello di settembre

Secondo appello di settembre

- Si considerino i sottospazi di \mathbb{R}^2 così definiti:

$$X_1 = \{(x, y), x^2 + y^2 < 1\}, \quad X_2 = \{(x, y), x^2 + y^2 = 1 \text{ e } x > 0\}, \quad X = X_1 \cup X_2.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- | | |
|---|--|
| 1 | X_1 è aperto in X e in \mathbb{R}^2 |
| 2 | X_2 è chiuso in X e in \mathbb{R}^2 |
| 3 | X_2 è chiuso in X ma non in \mathbb{R}^2 |
| 4 | X_2 è chiuso in \mathbb{R}^2 ma non in X |
| 5 | $X = X_1 \cup X_2$ è una sconnessione di X |
| 6 | Nessuna delle precedenti |

- Si considerino i seguenti sottospazi di \mathbb{R} :

$$X_1 = (0, 1), \quad X_2 = (0, 1], \quad X_3 = \mathbb{R} - \{0\},$$

e siano X_1^*, X_2^*, X_3^* le rispettive compattefazioni di Alexandroff. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- | | |
|---|--|
| 1 | X_1^*, X_2^*, X_3^* sono tutti omeomorfi a S^1 |
| 2 | X_1^* è omeomorfo a S^1 e X_2^* è omeomorfo a $[0, 1]$ |
| 3 | X_3^* è omeomorfo a S^1 |
| 4 | X_3^* è omeomorfo alla "figura a otto" |
| 5 | Nessuna delle precedenti |

- Sia \mathcal{Z} la topologia cofinita su \mathbb{R} . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- | | |
|---|--|
| 1 | $(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$ è connesso |
| 2 | $(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$ è compatto |
| 3 | $(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$ è di Hausdorff |
| 4 | Nessuna delle precedenti |

4. Sia $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ l' n - toro, prodotto topologico di n copie di S^1 . Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1 T^n è una varietà topologica compatta
- 2 Il rivestimento universale di T^n è \mathbb{R}^n
- 3 $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$, somma diretta di n copie di \mathbb{Z}
- 4 Nessuna delle precedenti

5. Sia $\mathbb{R}P^n = S^n/\rho$ lo spazio proiettivo reale, quoziente della sfera S^n modulo la relazione ρ di antipodalità. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1 $\mathbb{R}P^n$ non è semplicemente connesso, per ogni $n \geq 1$
- 2 $\mathbb{R}P^1$ è omeomorfo a S^1
- 3 $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$ per ogni $n \geq 1$
- 4 Nessuna delle precedenti

6. Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}P^2$ il supporto di una conica proiettiva, di equazione cartesiana

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0,$$

nelle coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2]$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1 \mathcal{C} è necessariamente non vuoto
- 2 \mathcal{C} è un chiuso di $\mathbb{R}P^2$
- 3 \mathcal{C} è compatto, nella topologia indotta da $\mathbb{R}P^2$
- 4 \mathcal{C} è connesso, nella topologia indotta da $\mathbb{R}P^2$
- 5 Nessuna delle precedenti

7. Si consideri su $X = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ l'azione del gruppo \mathbb{Z} generata dalla trasformazione

$$(x, y, z) \longrightarrow (2x, 2y, 2z),$$

ovvero $n \in \mathbb{Z}$ agisce su X nel modo seguente $(x, y, z) \longrightarrow (2^n x, 2^n y, 2^n z)$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- 1 L'azione è propriamente discontinua
- 2 X è semplicemente connesso
- 3 Il gruppo fondamentale dello spazio delle orbite è isomorfo a \mathbb{Z}
- 4 Nessuna delle precedenti