Risposte della prova scritta di Geometria II, a.a. 2016-17 - Prof. P. Piccinni - 12 settembre 2016

1. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^2$ così definiti:

$$X_1 = \{(x,y),\, x^2+y^2<1\}, \quad X_2 = \{(x,y),\, x^2+y^2=1 \text{ e } x>0\}, \quad X = X_1 \cup X_2.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$	X_1 è aperto in X e in $\mathbb{R}^2$
$\boxed{2}$	X_2 è chiuso in X e in $\mathbb{R}^2$
$\boxed{\bowtie 3}$	X_2 è chiuso in X ma non in $\mathbb{R}^2$
$\boxed{4}$	X_2 è chiuso in $\mathbb{R}^2$ ma non in X
$\boxed{5}$	$X = X_1 \cup X_2$ è una sconnessione di X
$\boxed{6}$	Nessuna delle precedenti

2. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}$:

$$X_1 = (0,1), \quad X_2 = (0,1], \quad X_3 = \mathbb{R} - \{0\},$$

e siano X_1^*, X_2^*, X_3^* le rispettive compattificazioni di Alexandroff. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$	X_1^*, X_2^*, X_3^* sono tutti omeomorfi a S^1
$\boxed{\bowtie 2}$	X_1^* è omeomorfo a S^1 e X_2^* è omeomorfo a $[0,1]$
$\boxed{3}$	X_3^* è omeomorfo a S^1
$\boxed{\bowtie 4}$	X_3^* è omeomorfo alla "figura a otto"
$\boxed{5}$	Nessuna delle precedenti

3. Sia $\mathcal{Z}$ la topologia cofinita su $\mathbb{R}$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$	$(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$ è connesso
$\boxed{\bowtie 2}$	$(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$ è compatto
$\boxed{3}$	$(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$ è di Hausdorff
$\boxed{4}$	Nessuna delle precedenti

4. Sia $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ l' n- toro, prodotto topologico di n copie di S^1. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$	T^n è una varietà topologica compatta
$\boxed{\bowtie 2}$	Il rivestimento universale di T^n è $\mathbb{R}^n$
$\boxed{\bowtie 3}$	$\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$, somma diretta di n copie di $\mathbb{Z}$
$\boxed{4}$	Nessuna delle precedenti

5. Sia $\mathbb{R}P^n = S^n/\rho$ lo spazio proiettivo reale, quoziente della sfera S^n modulo la relazione ρ di antipodalità. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$ $\mathbb{R}P^n$ <u>non</u> è semplicemente connesso, per ogni $n \geq 1$
$\boxed{\bowtie 2}$ $\mathbb{R}P^1$ è omeomorfo a S^1
$\boxed{3}$ $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$ per ogni $n \geq 1$
$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti

6. Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}P^2$ il supporto di una conica proiettiva, di equazione cartesiana

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0,$$

nelle coordinate proiettive omogenee $[x_0, x_1, x_2]$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ $\mathcal{C}$ è necessariamente non vuoto
$\boxed{\bowtie 2}$ $\mathcal{C}$ è un chiuso di $\mathbb{R}P^2$
$\boxed{\bowtie 3}$ $\mathcal{C}$ è compatto, nella topologia indotta da $\mathbb{R}P^2$
$\boxed{\bowtie 4}$ $\mathcal{C}$ è connesso, nella topologia indotta da $\mathbb{R}P^2$
$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

7. Si consideri su $X = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ l'azione del gruppo $\mathbb{Z}$ generata dalla trasformazione

$$(x, y, z) \longrightarrow (2x, 2y, 2z),$$

ovvero $n \in \mathbb{Z}$ agisce su X nel modo seguente $(x, y, z) \longrightarrow (2^n x, 2^n y, 2^n z)$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$ L'azione è propriamente discontinua
$\boxed{\bowtie 2}$ X è semplicemente connesso
$\boxed{\bowtie 3}$ Il gruppo fondamentale dello spazio delle orbite è isomorfo a $\mathbb{Z}$
$\boxed{4}$ Nessuna delle precedenti