**Corso di Geometria II, a. a. 2015-16**

Foglio n. 1

**1.** Si consideri, nell'insieme $\mathcal{C}([0,1])$ delle funzioni continue nell'intervallo $[0,1]$ e a valori reali, la successione di funzioni $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$. Si determini, per ognuna delle due topologie indotte dalle distanze $d_1(f,g) = \sup|f(x) - g(x)|$ e $d_2(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|$ in $\mathcal{C}([0,1])$, l'eventuale esistenza di funzioni che siano limite per la successione assegnata.

**2.** Si consideri, in $\mathbf{R}$ dotato della topologia cofinita, la successione $\{x_n\}$ così definita: $x_n = 0$ se $n$ è pari e $x_n = n$ se $n$ è dispari. Stabilire se $\{x_n\}$ ammette limite ed eventualmente se esso è unico.

**3.** In $\mathbf{R}^2$ con la topologia euclidea si consideri il sottoinsieme $D = (0, +\infty) \times [0, +\infty)$. Determinare la parte interna $D^o = Int(D)$, la chiusura $\overline{D}$, la frontiera $\partial D = Fr(D)$ e la parte esterna $Est(D)$.

**4.** Sia $f : X \to Y$ un'applicazione tra spazi topologici (in $X$ e in $Y$ sono fissate topologie risp. $\tau_1$ e $\tau_2$). Verificare che $f$ è continua se e solo se per ogni sottoinsieme $D$ di $X$ risulta $f(\overline{D}) \subset \overline{f(D)}$.

**5.** Per ogni intero $n \geq 1$ si considerino gli insiemi:

$$\mathcal{C}_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \text{ con } \frac{1}{2n} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2n-1}\}$$

$$\mathcal{D}_n = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \text{ con } 2n - 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2n\}$$

e siano

$$\mathcal{C} = \cup_{n \geq 1} \mathcal{C}_n, \qquad \mathcal{D} = \cup_{n \geq 1} \mathcal{D}_n.$$

Stabire se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono chiusi nell'$\mathbf{R}^2$ euclideo e, in caso negativo, indicarne la chiusura.

**6.** Si consideri su $\mathbf{R}$ la topologia $\tau = \{\emptyset, \mathbf{Q}, \mathbf{R} - \mathbf{Q}, \mathbf{R}\}$. Determinare quali delle seguenti successioni ammettono limite: a) $\{2n\}$; b) $\{(-1)^n\}$ ; c) $\{n\pi\}$ ; d) $\{(\sqrt{2})^n\}$.

**7.** Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}$:

$$A = \{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbf{N}\}, \quad B = (1, 2], \quad C = (-3, +\infty), \quad D = \{n^5, n \in \mathbf{N}\}.$$

i) Determinare chiusura, interno e frontiera di $A, B, C, D$.

ii) $\overline{A} \cup B$ è chiuso? E $A \cup D$?

**8.** In uno spazio metrico $(X, d)$ sia dato un sottoinsieme non vuoto $B$; si definisce "distanza" di un punto $x \in X$ da $B$ il numero

$$d(x, B) = \inf_{y \in B} \{d(x, y)\}.$$

i) Dimostrare che al variare di $x$ in $X$, la funzione

$$d(x, B) : X \to \mathbf{R}$$

è continua, sempre $\geq 0$, e si annulla se e solo se $x \in \overline{B}$.

ii) In $(X, d)$ siano dati due sottoinsiemi non vuoti $B$ e $C$; si definisce loro "distanza" il numero

$$d(B, C) = \inf_{y \in B; z \in C} \{d(y, z)\}.$$

Tenendo conto di quanto detto in i), dimostrare che $d(B, C)$ è sempre $\geq 0$. Mostrare poi (con un esempio) che può essere $d(B, C) = 0$ anche se $B$ e $C$ sono due chiusi disgiunti.