**Corso di Geometria II, a. a. 2015-16**

Foglio n. 3

**1.** Sia $(X, d)$ uno spazio metrico e sia $\tau_d$ la topologia indotta dalla distanza $d$ su $X$. Dimostrare che, considerando su $X \times X$ la topologia prodotto $\tau_d \times \tau_d$ e su $\mathbf{R}$ la topologia euclidea, l'applicazione

$$d : X \times X \to \mathbf{R}$$

è continua.

**2.** Sia $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la prima proiezione canonica: $p(x, y) = x$. Siano $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}^2$ le topologie euclidee di $\mathbf{R}$ e di $\mathbf{R}^2$. Sia $p^{-1}(\mathcal{E})$ la topologia immagine inversa di $\mathcal{E}$ rispetto a $p$ (i cui aperti sono i sottoinsiemi $p^{-1}(A) \subset \mathbf{R}^2$ con $A$ aperto in $\mathcal{E}$).

i) Indicare due topologie su $\mathbf{R}$ di cui $p^{-1}(\mathcal{E})$ è la topologia prodotto.

ii) Verificare che $(\mathbf{R}^2, p^{-1}(\mathcal{E}))$ non è metrizzabile. [Si suggerisce di determinare una successione che ammette più limiti o in alternativa di verificare che lo spazio non è di Hausdorff].

**3.** In $(\mathbf{R}^2, \mathcal{E}^2)$ è data la relazione $(x, y) \sim (x', y') \iff x - x' = y - y'$.

i) Verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e descrivere le classi di equivalenza.

ii) Denotata con $q$ la proiezione sullo spazio quoziente, descrivere gli aperti saturi.

iii) Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ la funzione $f(x, y) = x - y$, ove $\mathbf{R}$ è dotato della topologia euclidea. Verificare che $f$ è continua. C' è qualche relazione tra $f$ e la $q$ del punto ii)?

**4** Dimostrare che $\mathbf{R}$ non è compatto nella topologia euclidea, indicando un suo ricoprimento aperto che non ammette sottoricoprimenti finiti. Ripetere analoga dimostrazione per gli intervalli del tipo $(a, b)$, $[a, b)$, $(a, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$.

**5.** Si considerino in $\mathbf{R}^2$ i sottoinsiemi

$$X_k = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ kx + ky - 1 = 0\},$$

essendo $k \in \mathbf{N}$, e l'insieme

$$X = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} X_k.$$

i) Stabilire se i sottoinsiemi $X_k$ sono chiusi in $\mathbf{R}^2$ e se sono compatti.

ii) Stabilire se $X$ è chiuso e in caso negativo determinarne la chiusura $\overline{X}$.

iii) Stabilire se $X$ (o $\overline{X}$) è compatto.

**6.** Si considerino i $\mathbf{R}^2$ le circonferenze:

$$C_n : \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2},$$

il punto $p_n = (\frac{2}{n}, 0) \in C_n$ e la retta $r_n$ tangente a $C_n$ in $p_n$.

i) Stabilire se gli insiemi

$$C = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} C_n, \qquad r = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} r_n$$

sono chiusi in $\mathbf{R}^2$. In caso negativo determinarne le chiusure $\overline{C}$ e $\overline{r}$.

ii) Posto $X = C \cap r$, determinare la chiusura $\overline{X}$ di $X$. Stabilire se le topologie euclidee indotte su $X$ e su $\overline{X}$ coincidono con le rispettive topologie discrete.

iii) Quali tra gli insiemi $C, r, X, \overline{X}$ sono compatti?