Corso di Geometria II, a. a. 2015-16

Foglio n. 4

1. Sia $I = [0,1] \subset \mathbf{R}$ con topologia euclidea indotta. Sia F l'insieme delle funzioni continue di I in $\mathbf{R}$.
i) Verificare che $d : F \times F \to \mathbf{R}$, definita ponendo

$$d(f,g) = sup_{x\in I}|f(x) - g(x)|$$

è una distanza su F.
Sia τ_d la topologia indotta da d su F.
ii) Provare che per ogni $f, g \in F$ l'applicazione $\alpha : I \to F$, con $\alpha(t) = f + t(g - f)$ è continua.
iii) Dimostrare che (F, τ_d) è connesso per archi.

2. Nel piano euclideo $\mathbf{R^2}$ si consideri il sottoinsieme $D = (0,+\infty) \times [0,+\infty)$.
i) Determinare $Int(D)$, $\overline{D}$, $Fr(D)$, $Est(D)$.
Sia ρ la relazione di equivalenza di $\mathbf{R^2}$ ottenuta identificando D ad un punto.
ii) Sia $X = \mathbf{R^2}/\rho$ lo spazio topologico quoziente e sia ξ il punto di X che è immagine di D tramite la proiezione canonica $p : \mathbf{R^2} \to X$. Determinare la chiusura in X, del sottoinsieme costituito dal solo punto ξ.
iii) Stabilire se X è connesso e se è compatto.

3. Sia $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R^4}$ l'applicazione:

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to (a,b,c,d).$$

Sia $\varphi^{-1}\mathcal{E}$ la topologia su $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ immagine inversa della topologia euclidea. Sia

$$S = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) : A = A^t = A^{-1}\}$$

il sottoinsieme delle matrici simmetriche e ortogonali.
i) Verificare che S è chiuso.
ii) Verificare che S è compatto.
iii) Determinare le componenti connesse di S.

4. Nel piano euclideo $\mathbf{R^2}$ è assegnata la curva $\mathcal{C}$, parametrizzata da

$$\alpha(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1)), \quad t \in \mathbf{R}$$

i) Verificare che $\mathcal{C}$ è un chiuso, connesso e non compatto in $\mathbf{R^2}$ (rispetto alla topologia euclidea)
ii) Posto $X = \mathcal{C} - \{O\}$, verificare che X ha tre componenti connesse, tutte non compatte.

5. Nello spazio topologico $X = \{(x,y) \in \mathbf{R^2} : xy > 0\}$, dotato di topologia euclidea, si consideri la seguente relazione di equivalenza $(x,y)\,\rho\,(x',y')$ se e solo se

$$det \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = 0.$$

i) Descrivere gli aperti saturi di X e determinare la saturazione dell'aperto $U = \{(x,y) \in X : x > 1, \ y > 1\}$.

ii) Verificare che lo spazio topologico quoziente $X/_\rho$ non è compatto, determinandone un ricoprimento aperto privo di sottoricoprimenti finiti.

iii) Verificare che $X/_\rho$ è connesso per archi.