Corso di Geometria II, a. a. 2015-16

Foglio n. 5

1. Siano $\varphi, \psi : X \to Y \subset \mathbb{R}^n$ applicazioni continue definite su uno spazio topologico X, e a valori in un sottospazio Y dell' $\mathbb{R}^n$ euclideo.

i) Si assuma che per ogni $x \in X$ il segmento da $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ sia contenuto in Y. Costruire un'omotopia $F : X \times I \to Y$ da φ a ψ.

ii) Dedurne che due applicazioni continue $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}^n$ sono necessariamente omotope.

2. (Da fare dopo aver svolto l'es. 1). Siano ora $\varphi, \psi : X \to S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ due applicazioni continue tali che $\varphi(x) \neq -\psi(x)$ per ogni $x \in X$.

i) Costruire un'omotopia $F : X \times I \to S^{n-1}$ da φ a ψ.

ii) Dedurne che ogni $\varphi : X \to S^{n-1}$ continua e non suriettiva è omotopa a un'applicazione costante.

3. (Teorema del punto fisso di Brouwer). Dimostrare che se $E^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ è il disco chiuso, allora ogni

$$f : E^2 \to E^2$$

continua ha un punto fisso: esiste $x \in E^2$ con $f(x) = x$. Si seguano i seguenti suggerimenti:

i) Se, per assurdo, $f(x) \neq x$ per ogni $x \in E^2$, l'intersezione della circonferenza S^1 bordo di E^2 con la semiretta r_x di origine $f(x)$ e passante per x definirebbe un'applicazione continua

$$\rho : E^2 \to S^1, \qquad x \in E^2 \to \rho(x) = r_x \cap S^1.$$

Cosa può dirsi dell'indotta ρ_* tra i gruppi fondamentali?

ii) Sia $i : S^1 \to E^2$ l'inclusione. Cosa può dirsi della composizione $\rho \circ i$? E delle indotte $(\rho \circ i)_*$ e $\rho_* \circ i_*$ tra i gruppi fondamentali?

iii) Evidenziare come quanto sopra conduce a un assurdo.

4. (Teorema fondamentale dell'algebra). Dimostrare che ogni polinomio non costante

$$\tilde{P}(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0$$

con coefficienti $a_n \neq 0, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ ammette uno zero in $\mathbb{C}$. Si seguano i seguenti suggerimenti.

i) Si consideri il polinomio $Q(z) = z^n$. Si osservi che, ristretto alla circonferenza S^1 dei numeri complessi di modulo 1, esso definisce un'applicazione

$$Q : S^1 \to S^1$$

che induce tra gruppi fondamentali l' omomorfismo non nullo:

$$Q_* : \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1) \longrightarrow \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1),$$

che manda il generatore $1 \in \mathbb{Z}$ in $n \in \mathbb{Z}$. La sua immagine è dunque il sottogruppo $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. Si osservi anche che S^1 è retratto forte di deformazione di $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

ii) Si guardi poi al polinomio monico

$$P(z) = \frac{1}{a_n} \tilde{P}(z) = z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0,$$

e si noti che $P(z)$ e $\tilde{P}(z)$ hanno necessariamente gli stessi zeri. Posto

$$\mu = |b_0| + |b_1| + \cdots + |b_{n-1}| + 1,$$

dimostrare che se per assurdo $P(z)$ è privo di zeri, e se $z \in S^1$, allora $P(\mu z)$ è all'interno del disco aperto di centro $Q(\mu z) = \mu^n z^n$ e raggio $\mu^n = |\mu^n z^n|$. Pertanto il segmento in $\mathbb{C}$ da $P(\mu z)$ a $\mu^n z^n$ non contiene l'origine.

iii) Definendo

$$f : z \in S^1 \to P(\mu z) \in \mathbb{C}^*, \qquad g : z \in S^1 \to Q(\mu z) = \mu^n z^n \in \mathbb{C}^*,$$

costruire quindi un'omotopia tra le applicazioni

$$f, g : S^1 \to \mathbb{C}^*,$$

ovvero una $F : S^1 \times I \to \mathbb{C}^*$ continua e tale che $F(z, 0) = f(z)$ e $F(z, 1) = g(z)$.

iv) Osservare infine che l'assumere P priva di zeri implica che f è omotopa ad un'applicazione costante. A tal fine si usi l'omotopia $H : S^1 \times I \to \mathbb{C}$ data da $H(z, t) = f((1 - t)\mu z)$. D'altra parte l'omomorfismo $g_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ coincide con Q_* ed è dunque non nullo. Ma f omotopa a g implica che $f_* = g_*$, e pertanto si ha una contraddizione.