Corso di Geometria II, a. a. 2018-19

Foglio n. 1

Consegnare le soluzioni all'inizio del primo tutorato,
ore 14 di martedì 19 aprile in aula IV.

Le soluzioni, elaborate in gruppi di quattro studenti,
devono riportare i nomi di tutti gli studenti del gruppo,
con astericato il nome di chi ha materialmente redatto le soluzioni

1. In $\mathbf{R}^2$ con la topologia euclidea si consideri il sottoinsieme $D = (0, +\infty) \times [0, +\infty)$. Determinare la parte interna $D^o = Int(D)$, la chiusura $\overline{D}$, la frontiera $\partial D = Fr(D)$ e la parte esterna $Est(D)$.

2. Sia X un insieme arbitrario su cui siano assegnate due topologie τ_1 e τ_2. Verificare che l'applicazione identica id: $(X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ è continua se e solo se τ_1 è più fine di τ_2. Si può affermare che esiste sempre qualche $f : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ che sia continua independentemente dalle scelte di τ_1 e τ_2?

3. Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che le seguenti condizioni sono equivalenti:
i) ogni punto $x \in X$ è un chiuso;
ii) per ogni $x, y \in X$ esistono intorni U_x di x e U_y di y con $y \notin U_x$, $x \notin U_y$;
iii) per ogni $x \in X$ l'intersezione di tutti gli intorni di x coincide con x.

4. Per ogni intero $n \geq 1$ si considerino gli insiemi:

$$\mathcal{C}_n = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ con } \frac{1}{2n} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2n-1}\}$$

$$\mathcal{D}_n = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ con } 2n - 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2n\}$$

e siano

$$\mathcal{C} = \cup_{n \geq 1} \mathcal{C}_n, \qquad \mathcal{D} = \cup_{n \geq 1} \mathcal{D}_n.$$

Stabire se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono chiusi nell'$\mathbf{R}^2$ euclideo e, in caso negativo, indicarne la chiusura.

5. Si consideri il sottoinsieme $S = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbf{R}^2; n, m \in \mathbf{N}\}$ dell' $\mathbf{R}^2$ euclideo. Determinare la parte interna S^o, la parte esterna Est S, la frontiera ∂S, la chiusura $\overline{S}$.

6. Si consideri nello spazio eucideo $\mathbb{R}^3$ la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t.$$

i) Determinare la lunghezza dell'arco di $\mathcal{C}$ descritto da $t \in [0, 1]$.
ii) Riparametrizzare $\mathcal{C}$ mediante il parametro di ascissa curvilinea.

7. Si consideri nello spazio eucideo $\mathbb{R}^3$ la curva $\mathcal{D}$ di equazioni parametriche

$$x = \frac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 + 1}), \quad y = \frac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 + 1}), \quad z = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\log(s + \sqrt{s^2 + 1})).$$

Stabilire se s è un parametro di ascissa curvilinea su $\mathcal{D}$.