Corso di Geometria II, a. a. 2018-19

Foglio n. 2

Consegnare le soluzioni all'inizio del primo tutorato,
ore 14 di martedì 26 marzo in aula IV.

Le soluzioni, elaborate in gruppi di quattro studenti,
devono riportare i nomi di tutti gli studenti del gruppo,
con astericato il nome di chi ha materialmente redatto le soluzioni

1. Si consideri, nell'insieme $\mathcal{C}([0,1])$ delle funzioni continue nell'intervallo $[0,1]$ e a valori reali, la successione di funzioni $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$. Si determini, per ognuna delle due topologie indotte dalle distanze $d_1(f,g) = \sup|f(x) - g(x)|$ e $d_2(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$ in $\mathcal{C}([0,1])$, l'eventuale esistenza di funzioni che siano punti di convergenza per la successione assegnata.

2. Si consideri, in $\mathbf{R}$ dotato della topologia cofinita, la successione $\{x_n\}$ così definita: $x_n = 0$ se n è pari e $x_n = n$ se n è dispari. Stabilire se $\{x_n\}$ ammette punti di convergenza.

3. Si considerino su $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ le seguenti topologie prodotto: $\tau_1 = \mathcal{E} \times \mathcal{Z}$, $\tau_2 = \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$, $\tau_3 = \tau_{\text{ban}} \times \tau_{\text{discr}}$, essendo $\mathcal{E}, \mathcal{Z}, \tau_{\text{ban}}, \tau_{\text{discr}}$ le topologie rispettivamente euclidea, cofinita, banale e discreta su $\mathbf{R}$.

i) Stabire quali relazioni d'ordine "di maggiore finezza" sussistono tra τ_1, τ_2, τ_3.

ii) Per ognuna delle topologie τ_1, τ_2, τ_3 stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ sono aperti:
a) il quadrato $I^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$,
b) il disco $B^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 < 1\}$,
c) $\mathbf{R}^2 - (0,0)$.

iii) Si considerino infine le coppie $(\tau_i, \tau_j)(i,j = 1,2,3)$, di topologie che, secondo la risposta data al quesito i) sono non confrontabili. Costruire esempi di sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ che siano aperti in τ_i ma non in τ_j e viceversa.

4. Si consideri su $\mathbf{R}$ la topologia $\tau = \{\emptyset, \mathbf{Q}, \mathbf{R} - \mathbf{Q}, \mathbf{R}\}$. Determinare quali delle seguenti successioni ammettono punti di convergenza: a) $\{2n\}$; b) $\{(-1)^n\}$; c) $\{n\pi\}$; d) $\{(\sqrt{2})^n\}$.

5. Sia $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la prima proiezione canonica: $p(x,y) = x$. Siano $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}^2$ le topologie euclidee di $\mathbf{R}$ e di $\mathbf{R}^2$. Sia $p^{-1}(\mathcal{E})$ la topologia immagine inversa di $\mathcal{E}$ rispetto a p (i cui aperti sono i sottoinsiemi $p^{-1}(A) \subset \mathbf{R}^2$ con A aperto in $\mathcal{E}$).

i) Indicare due topologie su $\mathbf{R}$ di cui $p^{-1}(\mathcal{E})$ è la topologia prodotto.

ii) Verificare che $(\mathbf{R}^2, p^{-1}(\mathcal{E}))$ non è metrizzabile. [Si suggerisce di determinare una successione che ammette più punti di convergenza o in alternativa di verificare che lo spazio non è di Hausdorff].

6. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua tra spazi topologici, sia $\Gamma_f = \{(x, f(x), x \in X\} \subset X \times Y$ il grafico di f, e si consideri su Γ_f la topologia indotta dalla topologia prodotto di $X \times Y$. Dimostrare che Γ_f è omeomorfo a X.

7. Si consideri in $\mathbf{R^2}$ la seguenti curva parametrizzata:

$$\sigma(t) :\ x = t^3 - 4t,\ y = t^2 - 4 \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

i) Stabilire per quali valori di t risulta $\sigma'(t) \neq 0$.
ii) Determinare la funzione $k(t)$ di curvatura.

8. Si considerino in $\mathbf{R^3}$ le seguenti curve parametrizzate:

$$\alpha(t) :\ x = cos\, t,\ y = sin\, t,\ z = e^t \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

$$\beta(t) :\ x = t,\ y = \frac{t^2}{2},\ z = sin\, t \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Determinare per entrambe le curve la funzione $k(t)$ di curvatura.